SOLUCIONARIO DE LAS ECUACIONES EJEMPLARES DE 4º DE ESO

RECURSOS BÁSICOS PARA TRIUNFAR EN EL BACHILLERATO DE CIENCIAS

MATEOMÁTICAS.COM

La gran mayoría de las soluciones se pueden comprobar con facilidad sustituyéndolas en las incógnitas

0 Recuerda algunos conceptos básicos:

$$\frac{x^4-3}{2}-\frac{x-1}{3}\cdot\frac{3x^2+2}{2}=\frac{x-1}{6}-\boxed{x}\cdot\frac{x^2+1}{2}$$

$$\frac{x^4-3}{2}-\frac{x-1}{3}\cdot\frac{3x^2+2}{2}=\frac{x-1}{6}-\boxed{\frac{x}{1}}\cdot\frac{x^2+1}{2}$$

ABC: resolvemos las dos multiplicaciones de fracciones antes de precipitarnos intentando quitar los denominadores

$$\frac{x^4-3}{2}-\frac{3x^3+2x-3x^2-2}{6}=\frac{x-1}{6}-\frac{x^3+x}{2}$$

Igualamos denominadores...

$$\frac{3x^4-9}{6}-\frac{3x^3+2x-3x^2-2}{6}=\frac{x-1}{6}-\frac{3x^3+3x}{6}$$

... y antes de tacharlos: REFLEXIÓN Y PELIGRO! → tachón, reflexión, peligro

$$\frac{3x^4-9}{\cancel{6}}-\left(\frac{3x^3+2x-3x^2-2}{\cancel{6}}\right)=\frac{x-1}{\cancel{6}}-\left(\frac{3x^3+3x}{\cancel{6}}\right)$$

CUANDO TENEMOS UN MENOS DELANTE DE OPERACIONES COMBINADAS, COMO AFECTA A TODO EL RESULTADO, TENEMOS QUE COLOCAR PARÉNTESIS. RECUERDA QUE ES UNO DE LOS FALLOS MÁS HABITUALES EN LOS EXÁMENES Y QUE ARRUINA MULTITUD DE EJERCICIOS.

$$3x^4-9-(3x^3+2x-3x^2-2)=x-1-(3x^3+3x)$$

$$3x^4-9-3x^3-2x+3x^2+2=x-1-3x^3-3x$$

$$3x^4-3x^3+3x^3+3x^2-2x-x+3x+1-9+2=0$$

$$3x^4+3x^2-6=0 \xrightarrow{:3} x^4+x^2-2=0 \xrightarrow{x^2=t} t^2+t-2=0$$

$$t=\frac{-1\pm3}{2}\left\{\begin{array}{l} t_1=1=x^2 \longrightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{1}=\pm1} \\ t_2=-2=x^2 \longrightarrow \end{array}\right.$$

2 soluciones válidas fáciles de comprobar

Imposible deshacer el cambio de variable

1

ABC

Antes de quitar denominadores, debemos resolver paréntesis, operadores, productos...

$$1-\frac{x^2-1}{2}\cdot\frac{2x-3}{3}=\frac{x+5}{4}$$

$$1-\frac{2x^3-3x^2-2x+3}{6}=\frac{x+5}{4}$$

$$\frac{12}{\cancel{12}}-\left(\frac{4x^3-6x^2-4x+6}{\cancel{12}}\right)=\frac{3x+15}{\cancel{12}}$$

$$12-4x^3+6x^2+4x-6=3x+15$$

$$-4x^3+6x^2+x-9=0$$

(recomiendo coeficiente lider positivo)

$$4x^3-6x^2-x+9=0$$

	4	-6	-1	9
-1		-4	10	-9
	4	-10	9	0

$$\underbrace{(a \quad b \quad c)}$$

Δ = b² - 4ac

Δ = 100 – 144 < 0

No hay más soluciones

$$\boxed{\begin{array}{c} x=-1 \\ \text{Solución única} \end{array}}$$

2

ABC

$$3-\left(\frac{x^2-1}{3}\right)\cdot\frac{(2x-3)}{1}=\frac{x+2}{2}$$

$$3-\frac{2x^3-3x^2-2x+3}{3}=\frac{x+2}{2}$$

$$\frac{18}{6}-\left(\frac{4x^3-6x^2-4x+6}{6}\right)=\frac{3x+6}{6}$$

$$18-4x^3+6x^2+4x-6=3x+6$$

$$-4x^3+6x^2+x+6=0$$

$$4x^3-6x^2-x-6=0$$

	4	-6	-1	-6
2		8	4	6
	4	2	3	0

Δ = 4 - 48 < 0

$$\boxed{\begin{array}{c} x=2 \\ \text{Solución única} \end{array}}$$

3

$$x^6-4x^2=6x^3-3x^5$$

$$x^6+3x^5-6x^3-4x^2=0$$

$$x^2\left(x^4+3x^3-6x-4\right)=0$$

	1	3	0	-6	-4
-1		-1	-2	2	4
	1	2	-2	-4	0
-2		-2	0	4	
	1	0	-2	0	

(a b c)

$$x^2-2=0$$

$$x^2=2$$

$$\boxed{x_1=0}$$

$$\boxed{x_2=-1}$$

$$\boxed{x_3=-2}$$

$$\boxed{x_4=\sqrt{2}} \quad \boxed{x_5=-\sqrt{2}}$$

4

ABC

$$\frac{x+1}{2}\cdot\frac{x^2+4}{2}+\frac{3x}{2}\cdot\frac{x+3}{3}=1-2x^4$$

$$\frac{x^3+x^2+4x+4}{4}+\frac{3x^2+9x}{6}=1-2x^4$$

$$\frac{3x^3+3x^2+12x+12}{\cancel{12}}+\frac{6x^2+18x}{\cancel{12}}=\frac{12-24x^4}{\cancel{12}}$$

(no hay “peligro”)

$$24x^4+3x^3+9x^2+30x=0$$

$$x\left(24x^3+3x^2+9x+30\right)=0$$

	24	3	9	30
-1		-24	21	-30
	24	-21	30	0

(a b c)

$\triangle$ = 441 - 2880 < 0

No hay más soluciones

$$\boxed{x_1=0}$$

$$\boxed{x_2=-1}$$

5

$$2x^6=2x^2-5x^3+5x^5$$

$$2x^6-5x^5+5x^3-2x^2=0$$

$$\underline{x^2}\,(\underline{2x^4-5x^3+5x-2})=0$$

	2	-5	0	5	-2
1		2	-3	-3	2
	2	-3	-3	2	0
-1		-2	5	-2	
	2	-5	2	0	

(a b c)

△ = 25 – 16 = 9

$$x=\frac{5\pm 3}{4}$$

$\boxed{x_1=0}$ $\boxed{x_2=1}$ $\boxed{x_3=-1}$ $\boxed{x_4=2}$ $\boxed{x_5=1/2}$

6

$$\frac{x^3-3x^2-2}{x-5}=1$$

$$x^3-3x^2-2=x-5$$

$$x^3-3x^2-x+3=0$$

	1	-3	-1	3
1		1	-2	-3
	1	-2	-3	0

△ = 4 + 12 = 16 ; $x=\dfrac{2\pm 4}{2}$

$\boxed{x_1=1}$ $\boxed{x_2=3}$ $\boxed{x_3=-1}$

7

$$x^3=\frac{-3x}{x^2-4}$$

$$x^5-4x^3=-3x$$

$$x^5-4x^3+3x=0$$

$$\underline{x}\,(\underline{x^4-4x^2+3})=0$$

Bicuadrada: x²=t

$$t^2-4t+3=0$$

△ = 16 - 12 = 4 ; $t=\dfrac{4\pm 2}{2}$

$\boxed{t_1=3}$ $\boxed{t_2=1}$

$x^2=3$ $x^2=1$

$\boxed{x_1=0}$ $\boxed{x_2=\sqrt{3}}$ $\boxed{x_3=-\sqrt{3}}$ $\boxed{x_4=1}$ $\boxed{x_5=-1}$

8

ABC

$$\frac{x^2(7-x^2)}{12}=1-\frac{x(4-x^2)}{6}$$

$$\frac{7x^2-x^4}{12}=1-\frac{4x-x^3}{6}$$

$$\frac{7x^2-x^4}{\cancel{12}}=\frac{12}{\cancel{12}}-\left(\frac{8x-2x^3}{\cancel{12}}\right)$$

$$7x^2-x^4=12-8x+2x^3$$

$$0=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$$

	1	2	-7	-8	12
1		1	3	-4	-12
	1	3	-4	-12	0
2		2	10	12	
	1	5	6	0	

Δ = 25 – 24 = 1

$$x=\frac{-5\pm 1}{2}$$

$\boxed{x_1=1}$ $\boxed{x_2=2}$ $\boxed{x_3=-2}$ $\boxed{x_4=-3}$

---

9 $\sqrt{-x}-\sqrt{2x+1}+1=0$

(1) Despejo una raíz: $1+\sqrt{-x}=\sqrt{2x+1}$

(2) Elevamos al cuadrado ambos miembros: $1+2\sqrt{-x}+(-x)=2x+1$

(1) Despejo la raíz que queda: $2\sqrt{-x}=3x \xrightarrow{(2)} 4(-x)=9x^2$

$\rightarrow 0=9x^2+4x \rightarrow 0=x(9x+4) \rightarrow \boxed{x_1=0}$ $\cancel{x_2=-4/9}$

Siempre que usemos la técnica de elevar al cuadrado ambos miembros, debemos comprobar que las soluciones sean válidas. Cuando elevamos expresiones al cuadrado, provocamos que términos opuestos se igualen (como con (-4)² = 4²) por lo que aparecen soluciones falsas normalmente

---

10 $\sqrt{x}-\sqrt{2x+1}+1=0 \xrightarrow{(1)} 1+\sqrt{x}=\sqrt{2x+1}$

(2)

$1+2\sqrt{x}+x=2x+1 \xrightarrow{(1)} 2\sqrt{x}=x$

(2)

$4x=x^2 \rightarrow 0=x(x-4) \rightarrow \boxed{x_1=0}$ $\boxed{x_2=4}$ Ambas válidas

11

$$5-\sqrt{x-1}-\sqrt{2x}=2 \xrightarrow{(1)} -\sqrt{2x}=-3+\sqrt{x-1}$$

(2)

$$2x=9-6\sqrt{x-1}+(x-1) \xrightarrow{(1)} x-8=-6\sqrt{x-1}$$

(2)

$$x^2-16x+64=36(x-1)$$

$$x^2-52x+100=0$$

$$\triangle = 2704 - 400 = 1304 = 48^2$$

$$x=\frac{52\pm 48}{2}$$

Solución única: $\boxed{x=2}$ $\cancel{x=50}$

12

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2=0 \xrightarrow{(1)} \sqrt[3]{x}=2-\sqrt{x}$$

(2, ¡al cubo!)

$$x=8-12\sqrt{x}+6x-x\sqrt{x} \xrightarrow{(1)} (x+12)\sqrt{x}=5x+8$$

(2)

$$(x^2+24x+144)x=25x^2+80x+64$$

$$x^3-x^2+64x-64=0$$

	1	-1	64	-64
1		1	0	64
	1	0	64	0

$$x^2+64=0$$

No hay más soluciones

$\boxed{x=1}$

13

$$2+\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x+5}}{3}+3 \xrightarrow{(1)} 3\sqrt{x}=\sqrt{x+5}+3$$

(2)

$$9x=(x+5)+6\sqrt{x+5}+9 \xrightarrow{(1)} 8x-14=6\sqrt{x+5}$$

$$4x-7=3\sqrt{x+5} \xrightarrow{(2)} 16x^2-56x+49=9(x+5)$$

$$16x^2-65x+4=0 \longrightarrow x=\frac{65\pm 63}{32} \longrightarrow$$ Solo vale: $\boxed{x=4}$

14

$$3+\sqrt{x}-\sqrt{3x+1}=2 \xrightarrow{(1)} 1+\sqrt{x}=\sqrt{3x+1}$$

(2)

$$1+2\sqrt{x}+x=3x+1 \xrightarrow{(1)} 2\sqrt{x}=2x \longrightarrow \sqrt{x}=x$$

(2)

$$x=x^2 \longrightarrow 0=x(x-1) \longrightarrow \boxed{x_1=0} \quad \boxed{x_2=1}$$

(ambas son válidas)

15

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=\sqrt{5-x} \xrightarrow{(2)} (x+5)-2\sqrt{x^2+5x}+x=5-x$$

(1)

$$3x=2\sqrt{x^2+5x} \xrightarrow{(2)} 9x^2=4(x^2+5x)$$

$$5x(x-4)=0 \longrightarrow \boxed{x_1=0} \quad \boxed{x_2=4}$$

(ambas son válidas)

16

$$\sqrt{x+2}+1=\sqrt{4x+1} \xrightarrow{(2)} (x+2)+2\sqrt{x+2}+1=4x+1$$

(1)

$$2\sqrt{x+2}=3x-2 \xrightarrow{(2)} 4(x+2)=9x^2-12x+4$$

$$0=9x^2-16x-4 \longrightarrow \triangle = 256 + 144 = 400 = 20^2$$

$$x=\frac{16\pm 20}{18}$$

Solución única: $\boxed{x=2}$ $\cancel{x=-2/9}$

Ni 1 ni -1 pueden ser solución: Factorizamos los denominadores:

17

$$\frac{x}{2}-\frac{3(x-1)}{x+1}=\frac{2-x}{x^2-1} \rightarrow \frac{x}{2}-\frac{3(x-1)}{x+1}=\frac{2-x}{(x+1)(x-1)}$$

Igualamos los denominadores, multiplicando arriba y abajo por los factores necesarios:

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\left(\frac{3(x-1)}{x+1}\cdot\frac{2(x-1)}{2(x-1)}\right)=\frac{2-x}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{2}{2}$$

$$x\cdot(x+1)(x-1)-(3(x-1)\cdot 2(x-1))=(2-x)\cdot 2$$

$$x(x^2-1)-(6(x-1)^2)=4-2x$$

$$x^3-x-(6x^2-12x+6)=4-2x$$

$$x^3-6x^2+13x-10=0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -6 & 13 & -10 \\ 2 & & 2 & -8 & 10 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}$$

$\triangle$ = 16 – 20 < 0

No hay más soluciones

$\boxed{x=2 \quad \text{Solución única y válida (1-1=0)}}$

18

$$\frac{8}{x-2}-\frac{6}{x}=\frac{4}{x^2-2x}+\frac{1}{2} \rightarrow \frac{8}{x-2}-\frac{6}{x}=\frac{4}{x(x-2)}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{8}{x-2}\cdot\frac{2x}{2x}-\left(\frac{6}{x}\cdot\frac{2(x-2)}{2(x-2)}\right)=\frac{4}{x(x-2)}\cdot\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x(x-2)}{x(x-2)}$$

$$8\cdot 2x-(6\cdot 2(x-2))=4\cdot 2+1\cdot x(x-2)$$

$$16x-(12x-24)=8+x^2-2x$$

$$\underbrace{0=x^2-6x-16}$$

$\triangle$ = 36 + 64 = 100 = 10²

$$x=\frac{6\pm 10}{2}$$

$\boxed{x_1=8}$ $\boxed{x_2=-2}$

19

$$\frac{x+1}{x+3}-2=x-\frac{x-3}{x^2-9} \rightarrow \underbrace{\frac{x+1}{x+3}-2=x-\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}}$$

Otra forma de evitar el “peligro”, cambiando de lado los términos que restan:

$$\underbrace{\frac{x+1}{x+3}+\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}=x+2}$$

$$\frac{(x+1)(x-3)}{\cancel{(x+3)(x-3)}}+\frac{x-3}{\cancel{(x+3)(x-3)}}=\frac{(x+2)(x+3)(x-3)}{\cancel{(x+3)(x-3)}}$$

$$x^2-2x-3+x-3=(x+2)(x^2-9)$$

$$x^2-x-6=x^3+2x^2-9x-18$$

$$0=x^3+x^2-8x-12$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 1 & -8 & -12 \\
-2 & & -2 & 2 & 12 \\
\hline
 & 1 & -1 & -6 & \vert\ 0
\end{array}$$

$\triangle$ = 1 + 24 = 25

$$x=\frac{1\pm 5}{2}$$

Solución no válida, ya que anula un denominador

$\cancel{x_1=3}$

$\boxed{x=-2}$ Solución única

20

$$\frac{x^2-1}{x-3}-2=\frac{x-1}{x+2}$$

Ya tenemos factorizados los denominadores!

$$\frac{(x^2-1)(x+2)}{\cancel{(x-3)(x+2)}}-\left(\frac{2(x-3)(x+2)}{\cancel{(x-3)(x+2)}}\right)=\frac{(x-1)(x-3)}{\cancel{(x-3)(x+2)}}$$

$$(x^2-1)(x+2)-2(x-3)(x+2)=(x-1)(x-3)$$

$$x^3+2x^2-x-2-2(x^2-x-6)=x^2-4x+3$$

$$x^3-x^2+5x+7=0 \rightarrow$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -1 & 5 & 7 \\
-1 & & -1 & 2 & -7 \\
\hline
 & 1 & -2 & 7 & \vert\ 0
\end{array}$$

$\triangle$ = 4 – 28 < 0 → No hay más soluciones

$x=-1$

Solución única y válida (0-2 = -2)

21 $$\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{3x+2}{x+1} \rightarrow \underbrace{\frac{x\cdot x}{\cancel{x(x+1)}}-\frac{x+1}{\cancel{x(x+1)}}=\frac{x(3x+2)}{\cancel{x(x+1)}}}$$

$$x^2-x-1=3x^2+2x$$

$$0=2x^2+3x+1 \rightarrow \triangle = 9-8 = 1 \rightarrow x=\frac{-3\pm1}{4}$$

$\boxed{x=-1/2}$ Solución única, ya que x = -1 anula varios denominadores

---

22 $$\frac{3x}{x^2-4}+2=\frac{x-5}{2}-\frac{x+2}{x-2} \rightarrow \underbrace{\frac{3x}{(x+2)(x-2)}+2=\frac{x-5}{2}-\frac{x+2}{x-2}}$$

$$\frac{2\cdot3x}{2(x+2)(x-2)}+\frac{2\cdot2(x+2)(x-2)}{2(x+2)(x-2)}=\frac{(x-5)(x+2)(x-2)}{2(x+2)(x-2)}-\frac{(x+2)\cdot2(x+2)}{2(x+2)(x-2)}$$

$$6x+4(x+2)(x-2)=(x-5)(x+2)(x-2)-2(x+2)(x+2)$$

$$\underbrace{0=x^3-11x^2-18x+28}$$

$\boxed{x_1=1}$ $\boxed{x_2=5+\sqrt{53}}$ $\boxed{x_3=5-\sqrt{53}}$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -11 & -18 & 28 \\ 1 & & 1 & -10 & -28 \\ \hline & 1 & -10 & -28 & 0 \end{array}$$

$\rightarrow \triangle = 100 + 112 = 212$; $x=\frac{10\pm\sqrt{212}}{2}$

---

23 $$\frac{4}{x}-\frac{3x-1}{x+3}=\frac{x}{2} \rightarrow \underbrace{\frac{4\cdot2\cdot(x+3)}{x\cdot2\cdot(x+3)}-\frac{2x(3x-1)}{2x(x+3)}=\frac{x\cdot x(x+3)}{2x(x+3)}}$$

$$\underbrace{8x+24-6x^2+2x=x^3+3x^2 \rightarrow 0=x^3+9x^2-10x-24}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 9 & -10 & -24 \\ 2 & & 2 & 22 & 24 \\ \hline & 1 & 11 & 12 & 0 \end{array}$$

$\rightarrow \triangle = 121 - 48 = 73$; $x=\frac{-11\pm\sqrt{73}}{2}$

$\boxed{x_1=2}$ $\boxed{x_2=\frac{-11+\sqrt{73}}{2}}$ $\boxed{x_3=\frac{-11-\sqrt{73}}{2}}$

En las ecuaciones con valor absoluto, la forma más sencilla de resolverlas es contemplar las dos posibilidades, aunque se nos duplique el número de ecuaciones: que el valor absoluto actúe y cambie el signo (porque es negativo lo de dentro) o que no haga nada (porque es positivo). No merece la pena discriminar cuando actúa o no, porque eso no nos libra de resolver ambas ecuaciones ni de las soluciones falsas

24

$$(x-2)\cdot|3-x|=2$$

(no actúa I...I)

$$(x-2)\cdot(3-x)=2$$

$$3x-6-x^2+2x=2$$

$$0=x^2-5x+8$$

$$\triangle = 25 - 32 < 0$$

No hay solución

(sí actúa I...I)

$$(x-2)\cdot(-(3-x))=2$$

$$-3x+6+x^2-2x=2$$

$$x^2-5x+4=0$$

$$\triangle = 25 - 16 = 9$$

$$x=\frac{5\pm3}{2}$$

Hay que comprobarlas siempre si usamos esta técnica

4 funciona bien, pero 1 no: solución única $\boxed{x=4}$

25

$$x\cdot|1-x|=2$$

$$x(1-x)=2$$

$$x-x^2=2$$

$$0=x^2-x+2$$

$$\triangle = 1 - 8 < 0$$

No hay solución

$$x(-(1-x))=2$$

$$-x+x^2=2$$

$$x^2-x-2=0$$

$$\triangle = 1 + 8 = 9$$

$$x=\frac{1\pm3}{2}$$

Hay que comprobarlas siempre si usamos esta técnica

2 funciona bien, pero -1 no: solución única $\boxed{x=2}$

26

$$|x+2|+|x-3|=7$$

$$(x+2)+|x-3|=7 \qquad -(x+2)+|x-3|=7$$

$$|x-3|=5-x \qquad |x-3|=9+x$$

$$(x-3)=5-x \qquad -(x-3)=5-x \qquad (x-3)=9+x \qquad -(x-3)=9+x$$

$$\boxed{x_1=4}$$

No hay solución

No hay solución

$$\boxed{x_2=-3}$$

Válidas ambas

27

$$|x+2|+|x^2-3|=7$$

$$(x+2)+|x^2-3|=7 \qquad -(x+2)+|x^2-3|=7$$

$$|x^2-3|=5-x \qquad |x^2-3|=9+x$$

$$(x^2-3)=5-x \qquad -(x^2-3)=5-x \qquad (x^2-3)=9+x \qquad -(x^2-3)=9+x$$

$$x^2+x-8=0 \qquad 0=x^2-x+2 \qquad x^2-x-12=0 \qquad 0=x^2+x+6$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}$$

No hay solución

$$x=\frac{1\pm 7}{2}$$

No hay solución

Las soluciones válidas son: $\boxed{x_1=-3}$ $\boxed{x_2=\frac{-1+\sqrt{33}}{2}}$

28

$$|x+2|-|x-5|=|x+1|$$

$$x+2-|x-5|=|x+1| \qquad -x-2-|x-5|=|x+1|$$

$$7=|x+1| \qquad 2x-3=|x+1| \qquad -2x+3=|x+1| \qquad -7=|x+1|$$

$$7=\pm(x+1) \qquad 2x-3=\pm(x+1) \qquad -2x+3=\pm(x+1) \qquad -7=\pm(x+1)$$

$$x=6 \qquad x=-8 \qquad x=4 \qquad x=2/3 \qquad \underbrace{x=2/3 \qquad x=4 \qquad x=-8 \qquad x=6}_{\text{Repetidas}}$$

Válida | No válida | Válida | No válida

$$\boxed{x_1=4} \qquad \boxed{x_2=6}$$

29 $$2=\log_2(6-x)-2\log_2(x-1)$$

Unimos todos los logaritmos en uno sólo aplicando sus propiedades...

$$\log_a b+\log_a c=\log_a b\cdot c \qquad \log_a b-\log_a c=\log_a \frac{b}{c} \qquad 3\log_a b=\log_a b^3$$

$$\rightarrow\ 2=\log_2(6-x)-\log_2(x-1)^2 \ \rightarrow\ 2=\log_2\frac{(6-x)}{(x-1)^2}$$

...y la base del logaritmo se pone de base en el otro miembro...

$$2^2=\frac{(6-x)}{(x-1)^2}\ \rightarrow\ 4(x-1)^2=6-x\ \rightarrow\ 4x^2-7x-2=0$$

...y fuera logaritmo!

$$x=\frac{7\pm 9}{8}$$

-1/4 no es válida

$$\boxed{x=2}$$

---

30 $$3-\log_2(2+x)=1-2\log_2(x-1)$$

Juntamos los logaritmos: $2\log_2(x-1)-\log_2(2+x)=1-3$

$$\log_2(x-1)^2-\log_2(2+x)=-2\ \rightarrow\ \log_2\frac{(x-1)^2}{(2+x)}=-2$$

$$\frac{(x-1)^2}{(2+x)}=2^{-2}\ \rightarrow\ (x-1)^2=\frac{1}{4}\cdot(2+x)\ \rightarrow\ 4x^2-9x+2=0$$

$$x=\frac{9\pm 7}{8}$$

1/4 no es válida

$$\boxed{x=2}$$

---

31 $$0=5+3\log_x 2+\log_x 4\ \rightarrow\ -5=\log_x 2^3+\log_x 4$$

$$-5=\log_x(2^3\cdot 2^2)\ \rightarrow\ x^{-5}=2^5\ \rightarrow\ \frac{1}{x^5}=2^5$$

$$\rightarrow\ \frac{1}{x}=2\ \rightarrow\ \boxed{\frac{1}{2}=x}$$

Podemos comprobar que es válida.
En las ecuaciones logarítmicas debemos comprobar todas las soluciones

32

$$\log_2(3-x)=2\log_2(x+1)-1$$

$$\log_2(3-x)-\log_2(x+1)^2=-1$$

$$\underbrace{\log_2\frac{(3-x)}{(x+1)^2}=-1 \rightarrow \frac{(3-x)}{(x+1)^2}=2^{-1} \rightarrow 3-x=\frac{1}{2}\cdot(x+1)^2}$$

$$\underbrace{0=x^2+4x-5}$$

$$x=\frac{-4\pm 6}{2} \rightarrow \boxed{x=1}$$

-5 no es válida

33

$$2\log_2(x)=\log_2(x-1)+2$$

$$\underbrace{\log_2(x^2)-\log_2(x-1)=2 \rightarrow \log_2\frac{x^2}{x-1}=2}$$

$$\frac{x^2}{x-1}=2^2 \rightarrow x^2-4x+4=0 \rightarrow \boxed{x=2}$$

34

$$\log_3(2x-1)=1-\log_3(x^2+2)$$

$$\log_3(2x-1)+\log_3(x^2+2)=1$$

$$\underbrace{\log_3[(2x-1)\cdot(x^2+2)]=1}$$

$$(2x-1)\cdot(x^2+2)=3^1 \rightarrow 2x^3-x^2+4x-5=0$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -1 & 4 & -5 \\
1 & & 2 & 1 & 5 \\
\hline
 & 2 & 1 & 5 & 0
\end{array}$$

$$\boxed{x=1}$$

$\triangle$ = 1 - 40 < 0 No hay más soluciones

35

$$2\log_2(x-1)=\log_2(x^2-1)-1$$

$$\log_2(x-1)^2-\log_2(x^2-1)=-1$$

$$\underbrace{\log_2\frac{(x-1)^2}{(x^2-1)}=-1 \rightarrow \frac{(x-1)^2}{(x^2-1)}=2^{-1} \rightarrow x^2-2x+1=\frac{1}{2}\cdot(x^2-1)}$$

$$x^2-4x+3=0 \rightarrow x=\frac{4\pm 2}{2} \rightarrow \boxed{x=3}$$

1 no es válida

36

$$1+\log_2(2x)=2+\log_2(2x-1)$$

$$\underbrace{\log_2(2x)-\log_2(2x-1)=1 \rightarrow \log_2\frac{(2x)}{(2x-1)}=1}$$

$$\frac{(2x)}{(2x-1)}=2^1 \rightarrow 2x=4x-2 \rightarrow \boxed{x=1}$$

37

$$2\log_x 8=3\log_x 4+x-6$$

$$\log_x 8^2-\log_x 4^3=x-6$$

$$\log_x 64-\log_x 64=x-6 \rightarrow 0=x-6 \rightarrow \boxed{x=6}$$

38

$$1+x=2\log_8(0'25) \xrightarrow{\text{Despejo}} x=-1+2\log_8\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$x=-1+2(\underbrace{\cancel{\log_8 1}}_{0}-\log_8 4) \rightarrow x=-1-2\log_8 4$$

Cambio de base

$$\rightarrow x=-1-2\frac{\log_2 4}{\log_2 8} \rightarrow x=-1-2\cdot\frac{2}{3} \rightarrow \boxed{x=\frac{-7}{3}}$$

39 $2^{3x-2}=3\cdot 2^{x-1}-1$

En este tipo de ecuaciones, generalmente buscaremos un cambio de variable para convertirlas en polinómicas

$$\frac{2^{3x}}{2^2}=3\cdot\frac{2^x}{2^1}-1$$

Tenemos que aislar la “x” en el exponente, quitando primero lo que suma o reste y después lo que multiplica

$$\underbrace{\frac{(2^x)^3}{4}=3\cdot\frac{2^x}{2}-1 \rightarrow t=2^x \rightarrow \frac{t^3}{4}=3\cdot\frac{t}{2}-1}$$

$$t^3-6t+4=0$$

	1	0	-6	4
2		2	4	-4
	1	2	-2	0

$\triangle$ = 4 + 8 = 12

$$t=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{2}=-1\pm\sqrt{3}$$

$$\text{Si } t=2=2^x \rightarrow \boxed{x_1=1}$$

$$\text{Si } t=-1+\sqrt{3}=2^x \rightarrow \boxed{x_2=\log_2\left(-1+\sqrt{3}\right)}$$

$\text{Si } t=-1-\sqrt{3}=2^x \rightarrow$ No hay solución

---

40 $49^{\frac{x-8}{3}}-\frac{1}{\sqrt{7^{x-1}}}=0$

En esta ecuación podemos hacer algo mejor. Sólo tiene dos términos: vamos a intentar igualarlos con la misma base, de manera que los exponentes también tendrán que ser iguales

$$\underbrace{49^{\frac{x-8}{3}}=\frac{1}{\sqrt{7^{x-1}}} \rightarrow (7^2)^{\frac{x-8}{3}}=\frac{1}{(7^{x-1})^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 7^{\frac{2x-16}{3}}=7^{\frac{-(x-1)}{2}}}$$

$$\frac{2x-16}{3}=\frac{-(x-1)}{2}$$

$$\frac{4x-32}{\cancel{6}}=\frac{-3x+3}{\cancel{6}} \rightarrow 4x+3x=32+3 \rightarrow \boxed{x=5}$$

41

$$\frac{1}{2}=2^{2x-2}-\frac{2^{x+1}+1}{10}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{2^{2x}}{2^2}-\frac{2^1\cdot 2^x+1}{10} \qquad \frac{1}{2}=\frac{(2^x)^2}{4}-\frac{2\cdot 2^x+1}{10}$$

$$t=2^x \rightarrow \frac{1}{2}=\frac{t^2}{4}-\frac{2\cdot t+1}{10} \rightarrow \frac{10}{\cancel{20}}=\frac{5t^2}{\cancel{20}}-\frac{4\cdot t+2}{\cancel{20}}$$

$$0=5t^2-4\cdot t-12 \rightarrow t=\frac{4\pm 16}{10}=2^x \rightarrow \boxed{x=1}$$

La solución negativa de t no tiene sentido

42

$$0=2^{2x-1}-\frac{12+2^{x+2}}{10} \rightarrow 0=\frac{(2^x)^2}{2}-\frac{12+4\cdot 2^x}{10}$$

$$t=2^x \rightarrow 0=\frac{5t^2}{10}-\frac{(12+4t)}{10} \rightarrow 0=5t^2-4t-12$$

Igual que la anterior: $\boxed{x=1}$

43

$$4^{x+1}-2^{4x-1}=6 \rightarrow (2^2)^{x+1}-2^{4x-1}=6$$

$$\rightarrow 2^{2x+2}-2^{4x-1}-6=0 \rightarrow 4\cdot 2^{2x}-\frac{(2^{2x})^2}{2}-6=0$$

$$t=2^{2x} \rightarrow 4t-\frac{t^2}{2}-6=0 \rightarrow 0=t^2-8t+12$$

$$t=\frac{8\pm 4}{2}=2^{2x}$$

$$6=2^{2x} \rightarrow 2x=\log_2 6 \rightarrow \boxed{x_1=\frac{\log_2 6}{2}}$$

$$2=2^{2x} \rightarrow \boxed{x_2=\frac{1}{2}}$$

Con un cambio de base: $x_1=\log_4 6$

44

$$2^{2x-1}+3=2^{x+1}+4^{x-1} \rightarrow \frac{2^{2x}}{2}+3=2\cdot 2^{x}+\frac{(2^{2})^{x}}{4}$$

$$\underbrace{\rightarrow \frac{(2^{x})^{2}}{2}+3=2\cdot 2^{x}+\frac{(2^{x})^{2}}{4} \rightarrow t=2^{x} \rightarrow \frac{t^{2}}{2}+3=2t+\frac{t^{2}}{4}}$$

$$\underbrace{2t^{2}+12=8t+t^{2} \rightarrow t^{2}-8t+12=0}$$

$$t=\frac{8\pm 4}{2}=2^{x} \quad \begin{cases} 6=2^{x} \rightarrow \boxed{x_{1}=\log_{2}6} \\ 2=2^{x} \rightarrow \boxed{x_{2}=1} \end{cases}$$

45

$$\underbrace{2^{3x-2}-\frac{1}{4^{2-x}}=0}$$

Muy parecida a la ecuación 40, donde sólo hay dos términos y podemos igualarlos

$$2^{3x-2}=\frac{1}{4^{2-x}} \rightarrow 2^{3x-2}\cdot 4^{2-x}=1 \rightarrow 2^{3x-2}\cdot (2^{2})^{2-x}=1$$

$$\rightarrow 2^{3x-2}\cdot 2^{4-2x}=1 \rightarrow 2^{3x-2+4-2x}=1$$

El exponente debe valer 0 $\rightarrow 3x-2+4-2x=0 \rightarrow \boxed{x=-2}$

46

$$3^{2+x}-9^{2-x}=2\cdot 3^{3-x} \rightarrow 3^{2}\cdot 3^{x}-\frac{9^{2}}{9^{x}}=2\cdot\frac{3^{3}}{3^{x}}$$

$$\rightarrow 9\cdot 3^{x}-\frac{81}{3^{2x}}=\frac{54}{3^{x}} \rightarrow \frac{9\cdot 3^{3x}}{\cancel{3^{2x}}}-\frac{81}{\cancel{3^{2x}}}=\frac{54\cdot 3^{x}}{\cancel{3^{2x}}}$$

$$t=3^{x} \rightarrow 9t^{3}-81=54t \rightarrow 9t^{3}-54t-81=0$$

Seguimos en la siguiente página

Dividimos entre 9:

$$\rightarrow \quad t^3-6t-9=0$$

	1	0	-6	-9
3		3	9	9
	1	3	3	0

$\underbrace{1 \quad 3 \quad 3}$

$\triangle = 9 - 12 < 0$ No hay más soluciones en t

$$\text{Si } t=3=3^x \rightarrow \boxed{x=1}$$

47

$$3^{1+x}+3^{2x-1}=4\cdot 3^{3x-2} \rightarrow 3^1\cdot 3^x+\frac{3^{2x}}{3^1}=4\cdot\frac{3^{3x}}{3^2}$$

Multiplico por 9: $27\cdot 3^x+3\cdot 3^{2x}=4\cdot 3^{3x}$

$$t=3^x \rightarrow 27t+3t^2=4t^3 \rightarrow 0=t(4t^2-3t-27)$$

Es absurdo que t=0, ya que no podemos deshacer el cambio de variable

$$\rightarrow 0=4t^2-3t-27 \rightarrow t=\frac{3\pm 21}{8}=3^x$$

Con la solución negativa no podemos deshacer el cambio de variable

$$\rightarrow t=\frac{24}{8}=3=3^x \rightarrow \boxed{x=1}$$

48

$$\frac{2^{3x+2}}{8}=2^{1-x}-3\cdot 2^{x-1} \rightarrow 2^2\cdot\frac{2^{3x}}{8}=\frac{2^1}{2^x}-3\cdot\frac{2^x}{2^1}$$

$$t=2^x \rightarrow \frac{t^3}{2}=\frac{2}{t}-\frac{3t}{2} \qquad t^4=4-3t^2 \rightarrow t^4+3t^2-4=0$$

$$\underbrace{t^2=\frac{-3\pm 5}{2}} \rightarrow t^2=1 \rightarrow \underbrace{t=\pm 1=2^x} \rightarrow \underbrace{1=2^x}$$

La solución negativa carece de sentido

La solución negativa carece de sentido otra vez

$$\boxed{x=0}$$

49 $\operatorname{tg} 2x + 2\cos x = 0 \longrightarrow \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} + 2\cos x = 0$

1. Trabajando con ángulos distintos (“x” y “2x”) va a ser difícil que progresemos. Así que lo primero que vamos a emplear son FÓRMULAS que nos ayuden a trabajar con expresiones más sencillas:

$\boxed{\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x}$ $\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}$

$$\frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} + 2\cos x = 0$$

$$\longrightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x + 2\cos x\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right) = 0$$

2. Una vez nos llevamos todo a un lado y quitamos denominadores, pasamos a buscar sacar factor común, con la intención de partir la ecuación que tenemos en ecuaciones más chicas y sencillas:

$$2\cos x\left(\operatorname{sen} x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación ya deducimos dos soluciones:

$$\boxed{\begin{array}{c} x_1 = 90^o + k \cdot 360^o \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 270^o + k \cdot 360^o \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{array}}$$

Con la segunda ecuación nos queda trabajo:

3. Siempre es conveniente que nos quede la ecuación con una misma razón trigonométrica, lo cual puede facilitarnos aplicar un cambio de variable. Recuerda que:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}$$

$$\operatorname{sen} x + \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) - \operatorname{sen}^2 x = 0$$

$$0 = 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1$$

Cambio de variable: senx = t

$$0 = 2t^2 - t - 1 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \longrightarrow x = 90^o \left(\text{solución repetida}\right) \\ t_2 = \dfrac{-1}{2} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x_3 = 210^o + k \cdot 360^o \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ x_4 = -30^o + k \cdot 360^o \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{array}} \end{cases}$$

Todas las soluciones son válidas

50 $\operatorname{sen} x+\cos x=1$

En esta ocasión no hay fórmula que aplicar ni posibilidad de sacar factor común:

$\rightarrow \operatorname{sen} x+\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}=1 \rightarrow \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}=1-\operatorname{sen} x$

Elevamos al cuadrado ambos miembros, recordando que posiblemente nos aparezcan soluciones falsas:

$$1-\operatorname{sen}^2 x=1-2\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}^2 x$$

$0=\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen} x \rightarrow 0=\operatorname{sen} x(1-\operatorname{sen} x)$

$\operatorname{sen} x=0 \qquad \operatorname{sen} x=1$

$\boxed{x_1=0^{\circ}+k\cdot 360^{\circ} \text{ con } k\in\mathbb{Z}}$ $\boxed{x_2=90^{\circ}+k\cdot 360^{\circ} \text{ con } k\in\mathbb{Z}}$

También sale 180º pero es falsa

---

51 $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x-1}=\cos x \rightarrow \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}=\cos x\cdot\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}-1\right)$

$$\operatorname{sen} x\cos x=\cos x(\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x)$$

$0=\cos x(\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x-\operatorname{sen} x) \rightarrow 0=\cos x$

Opción no válida porque no habría tangente

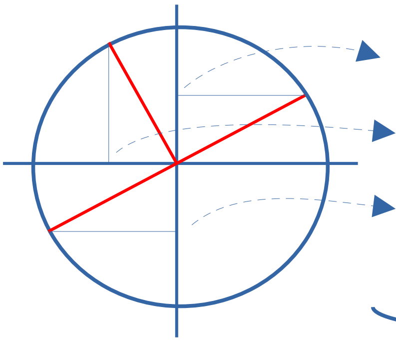
$$0=\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x-\operatorname{sen} x$$

La misma ecuación que aparece en el ejercicio 49 pero cambiada de signo $\rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1=210^{\circ}+k\cdot 360^{\circ} \text{ con } k\in\mathbb{Z} \\ x_2=-30^{\circ}+k\cdot 360^{\circ} \text{ con } k\in\mathbb{Z} \end{array}}$$

52 $$\frac{\operatorname{sen}(180^\circ+x)}{\cos(x+90^\circ)}=\operatorname{tg}3x$$

Parece imposible, o que necesitásemos varias fórmulas, pero razonemos:



$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}x\\ \cos(x+90^\circ)=-\operatorname{sen}x\\ \operatorname{sen}(180^\circ+x)=-\operatorname{sen}x\end{array}\right\}\quad \frac{-\operatorname{sen}x}{-\operatorname{sen}x}=\operatorname{tg}3x$$

$$\operatorname{tg}3x=1$$

$$3x=45^\circ+k\cdot 180^\circ \text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

$$\boxed{x=15^\circ+k\cdot 60^\circ \text{ con } k\in\mathbb{Z}}$$

---

53 $$\operatorname{sen}x-\cos 2x=2$$

$$\operatorname{sen}x-(\cos^2x-\operatorname{sen}^2x)=2$$

$$\operatorname{sen}x-((1-\operatorname{sen}^2x)-\operatorname{sen}^2x)=2$$

$$2\operatorname{sen}^2x+\operatorname{sen}x-3=0 \longrightarrow \operatorname{sen}x=\frac{-1\pm 5}{4}$$

senx = -6/4
es imposible

$$\longrightarrow \operatorname{sen}x=1 \longrightarrow \boxed{x=90^\circ+k\cdot 360^\circ \text{ con } k\in\mathbb{Z}}$$

---

54 $$\cos 4x+\cos 2x=0$$

$$\cos^2(2x)-\operatorname{sen}^2(2x)+\cos(2x)=0$$

Ya tenemos todos
los ángulos iguales

$$\cos^2(2x)-(1-\cos^2(2x))+\cos(2x)=0$$

$$2\cos^2(2x)+\cos(2x)-1=0 \longrightarrow \cos(2x)=\frac{-1\pm 3}{4}$$

Seguimos en la siguiente página

a) $\text{Si}: \cos(2x) = \frac{2}{4} \rightarrow 2x = 60° + k \cdot 360° \text{ con } k \in \mathbb{Z} \rightarrow \boxed{x_1 = 30° + k \cdot 180° \text{ con } k \in \mathbb{Z}}$

$\rightarrow 2x = 300° + k \cdot 360° \text{ con } k \in \mathbb{Z} \rightarrow \boxed{x_2 = 150° + k \cdot 180° \text{ con } k \in \mathbb{Z}}$

b) $\text{Si}: \cos(2x) = -1 \rightarrow 2x = 180° + k \cdot 360° \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow \boxed{x_3 = 90° + k \cdot 180° \text{ con } k \in \mathbb{Z}}$

Si lo piensas, tenemos $30°, 90°, 150°, 210°, 270°\ldots$

... que podemos resumirlo en: $\boxed{x = 30° + k \cdot 60° \text{ con } k \in \mathbb{Z}}$

La solución es 30º y todos los posibles giros de 60º que queramos hacer

---

55

$$2\cos^2 x = 3(1 - \text{sen } x)$$

$$2(1 - \text{sen}^2 x) = 3 - 3 \text{ sen } x$$

$$0 = 2 \text{ sen}^2 x - 3 \text{ sen } x + 1 \rightarrow \text{sen } x = \frac{3 \pm 1}{4}$$

a) $\text{Si}: \text{sen } x = 1 \rightarrow \boxed{x_1 = 90° + k \cdot 360° \text{ con } k \in \mathbb{Z}}$

b) $\text{Si}: \text{sen } x = 1/2 \rightarrow \boxed{x_2 = 30° + k \cdot 360° \text{ con } k \in \mathbb{Z}}$

$\rightarrow \boxed{x_3 = 150° + k \cdot 360° \text{ con } k \in \mathbb{Z}}$

56

$$\begin{cases} \log x = 1 + \log y \\ 2^{x-24} - 4^{y} = 0 \end{cases}$$

Lo ideal sería poder aplicar "reducción" de una forma sencilla. Aquí parece imposible, así que pasamos a estudiar qué incógnita es más fácil despejar para aplicar "sustitución". En este caso, lo tenemos sencillo en ambas ecuaciones

$$2^{x-24} = 4^{y}$$

$$2^{x-24} = (2^{2})^{y}$$

$$x - 24 = 2y$$

$$\boxed{x = 2y + 24}$$

$$\log x - \log y = 1$$

$$\log(x/y) = 1$$

$$x/y = 10^{1}$$

$$\boxed{x = 10y}$$

Este caso no es muy normal, pero ya que lo hemos hecho… aplicamos "igualación"

$$10y = 2y + 24 \longrightarrow 8y = 24 \longrightarrow \boxed{y = 3} \longrightarrow \boxed{x = 30}$$

57

$$\begin{cases} \log(x^{2} - 3) = 2\log(3 - y) \\ \log\left(\dfrac{x+y}{2} - 1\right) = 0 \end{cases}$$

Cuando hay logaritmos, parece idóneo quitárselos de encima desde el principio. Ojo al final con las soluciones no válidas

$$\frac{x+y}{2} - 1 = 10^{0}$$

$$\log(x^{2} - 3) = \log(3 - y)^{2}$$

$$x^{2} - 3 = (3 - y)^{2}$$

Nuestro sistema se ha transformado:

$$\begin{cases} x^{2} - 3 = y^{2} - 6y + 9 \\ x + y - 2 = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{x = 4 - y}$$

$$y^{2} - 8y + 16 - 3 = y^{2} - 6y + 9$$

$$-2y = -4$$

$$\boxed{y = 2} \quad \boxed{x = 2}$$

Solución válida

58

$$\begin{cases} 2^x+3^y=4 \\ 2^{2x}-3^{y+1}=-8 \end{cases}$$

$$2^{2x}-3^{y+1}=-8 \rightarrow (2^x)^2-3\cdot 3^y=-8$$

Doble cambio de variable: $\boxed{u=2^x, v=3^y}$

$$\begin{cases} u+v=4 \\ u^2-3v=-8 \end{cases}$$

x3

$$3u+3v=12$$

$$u^2-3v=-8$$

Aquí sí podemos aplicar reducción

$$u^2+3u=4$$

$$u=\frac{-3\pm 5}{2} \begin{cases} u_1=1 \rightarrow v_1=3 \rightarrow \boxed{x=0} \quad \boxed{y=1} \\ u_2=-4 \rightarrow v_2=8 \rightarrow \end{cases}$$

Imposible deshacer el cambio de variable

59

$$\begin{cases} \log_3 x=1-\log_3 y \\ 2^{x-1}-4^y=0 \end{cases}$$

$$\log_3 x=1-\log_3 y \rightarrow \underbrace{\log_3 x+\log_3 y=1}$$

$$\log_3(x\cdot y)=1$$

$$x\cdot y=3^1$$

$$\underbrace{2^{x-1}-4^y=0}$$

$$2^{x-1}=(2^2)^y$$

$$x-1=2y$$

$$\boxed{x=2y+1}$$

Sustitución

$$\underbrace{(2y+1)y=3}$$

$$2y^2+y-3=0$$

$$y=\frac{-1\pm 5}{4}$$

$$\boxed{y=1}$$

$$\boxed{x=3}$$

La solución negativa no tiene sentido en el logaritmo

60

$$\begin{cases} \sqrt{x}=3-\sqrt{1-y+x} \\ 3x+1=y^2 \end{cases}$$

Antes de realizar sustitución, conviene quitarse las complicaciones que aparezcan, ya sean logaritmos, raíces, valor absoluto...

Elevamos al cuadrado: (soluciones falsas probablemente)

$$x=9-6\sqrt{1-y+x}+(1-y+x)$$

$$6\sqrt{1-y+x}=10-y$$

$$3x=y^2-1 \qquad 36(1-y+x)=100-20y+y^2$$

$$36x=12y^2-12 \qquad 36x=64+16y+y^2$$

IGUALACIÓN

$$12y^2-12=64+16y+y^2$$

$$11y^2-16y-76=0$$

$$y=\frac{16\pm 60}{22}$$

$$\xrightarrow{-} \boxed{x_1=1,\ y_1=-2}$$

$$\xrightarrow{+} \boxed{x_2=441/121,\ y_2=38/11}$$

Y ambas son válidas!

61

$$\begin{cases} \sqrt{x}+y=3 \\ |x-2|-1=y^2 \end{cases}$$

Por las técnicas que vamos a emplear, las posibilidades de soluciones falsas se multiplican. Debemos ser prudentes al final y comprobar todas las soluciones con extremo cuidado

$$\sqrt{x}=3-y$$

$$\boxed{x=y^2-6y+9}$$

$$(x-2)-1=y^2 \qquad -(x-2)-1=y^2$$

$$\boxed{x=y^2+3} \qquad \boxed{x=-y^2+1}$$

Igualamos ambas con lo obtenido de la otra ecuación

$$3=-6y+9 \qquad -y^2+1=y^2-6y+9$$

$$\boxed{\begin{matrix} y=1 \\ x=4 \end{matrix}} \quad \text{Válida} \qquad 0=2y^2-6y+8$$

$\triangle$ = 36 – 64 < 0 ➡ No hay más soluciones

62

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}=3 \\ |y-2|-1=x \end{cases}$$

$x-\sqrt{y}=3 \rightarrow x-3=\sqrt{y} \rightarrow \boxed{x^2-6x+9=y}$

$(y-2)-1=x$ | $-(y-2)-1=x$
$\boxed{y=x+3}$ | $\boxed{y=-x+1}$

b) $x^2-6x+9=-x+1$

$x^2-5x+8=0$

$\triangle = 25 - 32 < 0$

No hay solución

a) $x^2-6x+9=x+3 \rightarrow x^2-7x+6=0$

$$x=\frac{7\pm5}{2}$$

$\boxed{\begin{matrix} x=6 \\ y=9 \end{matrix}}$ Válida

$\cancel{\begin{matrix} x=1 \\ y=4 \end{matrix}}$ No válida

63

$$\begin{cases} \dfrac{y-1}{x-1}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{y}{x^2-1} \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$$

Vamos a empezar por "simplificar" la primera ecuación, donde ni x=1 ni x=-1 pueden ser solución

$$\frac{y-1}{x-1}+\frac{1}{3}=\frac{y}{(x+1)(x-1)}$$

El m.c.m. de los denominadores es 3·(x-1)·(x+1) Multiplicamos cada fracción arriba y abajo por todos los factores que le falten en el denominador, para igualarlos

$$\frac{y-1}{x-1}\cdot\frac{3(x+1)}{3(x+1)}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{y}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{3}{3}$$

$3xy+\cancel{3y}-3x-3+x^2-1=\cancel{3y} \rightarrow 3xy-3x-3+x^2-1=0$

Está claro que no hay manera de aplicar reducción. Y si despejo cualquier incógnita de la segunda ecuación, me voy a ver obligado a meter raíces con sus problemas. Mejor despejar la "y" de esta ecuación

$$3xy=3x+x^2+4 \rightarrow \boxed{y=\frac{-x^2+3x+4}{3x}}$$

Seguimos en la siguiente página

Nuestro sistema ha quedado:

$$\begin{cases} y=\dfrac{-x^2+3x+4}{3x} \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \qquad \text{con } x\neq\pm1$$

No se puede descartar que x=0, porque en el sistema de partida no daba problemas

Sustituyo:

$$x^2+\left(\frac{-x^2+3x+4}{3x}\right)^2=5 \Rightarrow 9x^4+(-x^2+3x+4)^2=45x^2$$

$$\Rightarrow 9x^4+x^4-3x^3-4x^2-3x^3+9x^2+12x-4x^2+12x+16=45x^2$$

$$\Rightarrow 10x^4-6x^3-44x^2+24x+16=0 \Rightarrow$$

	5	-3	-22	12	8
1		5	2	-20	-8
	5	2	-20	-8	0
2		10	24	8	
	5	12	4	0	

Cuando los coeficientes suman 0, el 1 siempre triunfa

$$x=\frac{-12\pm8}{10}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1=2,\ y_1=1 \\ x_2=-2,\ y_2=1 \\ x_3=-2/5,\ y_3=-11/5 \end{array}}$$

64
$$\begin{cases} \cos y-\operatorname{sen} x=1 \\ 4\operatorname{sen} x\cos y+1=0 \end{cases}$$

Aplicamos un doble cambio de variable

$$\operatorname{sen} x=u \qquad \cos y=v$$

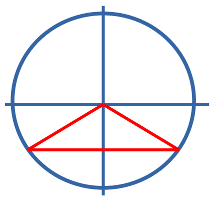
$$\begin{cases} v-u=1 \Rightarrow v=1+u \\ 4uv+1=0 \end{cases}$$

$$4u(1+u)+1=0$$

$$4u^2+4u+1=0$$

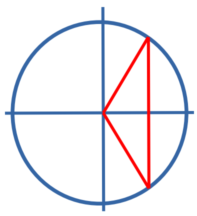
$$(2u+1)^2=0$$

$$u=\frac{-1}{2}=\operatorname{senx}$$



$$\Rightarrow x=-30^{o},\ y\,210^{o}$$

$$\cos y=1/2$$



$$\Rightarrow y=60^{o},\ y-60^{o}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1=210^{o}+k\cdot360^{o}\ldots,\ y_1=60^{o}+\ldots \\ x_2=210^{o}+\ldots,\ y_2=-60^{o}+\ldots \\ x_3=-30^{o}+\ldots,\ y_3=60^{o}+\ldots \\ x_4=-30^{o}+\ldots,\ y_4=-60^{o}+\ldots \end{array}}$$

65

$$\begin{cases} \log_2 y = 1 + \log_2 x \\ \operatorname{sen}^2 y + \cos^2 x = 2 - \cos y \end{cases}$$

Mejor despejamos de la primera ecuación

$$\log_2 y - \log_2 x = 1$$

$$\log_2 (y/x) = 1$$

$$y/x = 2^1$$

$$y = 2x$$

$$\operatorname{sen}^2 2x + \cos^2 x = 2 - \cos 2x$$

Aplicamos las fórmulas de ángulo doble:

RECUERDA USAR PARÉNTESIS CON LAS OPERACIONES COMBINADAS PRECEDIDAS DE UN MENOS, UN POR, AL CUADRADO...

$$(2 \operatorname{sen} x \cos x)^2 + \cos^2 x = 2 - (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)$$

$$4 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + \cos^2 x = 2 - \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$$

Se nos ha quedado en bandeja cambiar el seno por el coseno o viceversa. Aunque es más fácil sacar los dos ángulos con el coseno (el positivo y el negativo), en esta ocasión quedarnos con el seno tendrá premio (quedará una incompleta sencilla)

$$4 \operatorname{sen}^2 x (1 - \operatorname{sen}^2 x) + (1 - \operatorname{sen}^2 x) = 2 - (1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen}^2 x$$

$$4 \operatorname{sen}^2 x - 4 \operatorname{sen}^4 x + 1 - \operatorname{sen}^2 x = 2 - 1 + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{sen}^2 x - 4 \operatorname{sen}^4 x = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2 x (1 - 4 \operatorname{sen}^2 x) = 0$$

$$\operatorname{sen}^2 x = 0$$

$$\operatorname{sen} x = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= \pi + k \cdot \pi \text{ con } k \in \mathbb{N} \\ y_1 &= 2\pi + k \cdot 2\pi \text{ con } k \in \mathbb{N} \end{aligned}}$$

$$1 - 4 \operatorname{sen}^2 x = 0$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{\pm 1}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_2 &= \pi/6 + k \cdot 2\pi \text{ con } k \in \mathbb{N} \\ y_2 &= \pi/3 + k \cdot 2\pi \text{ con } k \in \mathbb{N} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_3 &= 5\pi/6 + k \cdot 2\pi \text{ con } k \in \mathbb{N} \\ y_3 &= 5\pi/3 + k \cdot 2\pi \text{ con } k \in \mathbb{N} \end{aligned}}$$

Al haber logaritmos implicados, evitamos todos los ángulos nulos o negativos, y además recurrimos a los radianes, que son compatibles con el sistema decimal

29

$$\begin{cases} \dfrac{2y}{x+1} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{y-2}{x^2+x} \\ y = 1 + \sqrt{x} \end{cases}$$

UNO DE LOS SISTEMAS MÁS BELLOS CONOCIDOS

$$\frac{2y}{x+1} - \frac{y}{x} = \frac{y-2}{x(x+1)}$$

$$\frac{2y}{x+1} \cdot \frac{x}{x} - \frac{y}{x} \cdot \frac{x+1}{x+1} = \frac{y-2}{x(x+1)}$$

$$2xy - xy - y = y - 2$$

$$xy - 2y = -2$$

$$y - 1 = \sqrt{x}$$

Elevo al cuadrado:

$$y^2 - 2y + 1 = x$$

Sustituimos x en la otra ecuación:

$$(y^2 - 2y + 1)y - 2y = -2$$

$$y^3 - 2y^2 + y - 2y + 2 = 0$$

$$y^3 - 2y^2 - y + 2 = 0$$

	1	-2	-1	2
1		1	-1	-2
	1	-1	-2	0

$\triangle$ = 1 + 8 = 9 $\Rightarrow$ $y = \dfrac{1 \pm 3}{2}$

$\cancel{x_1 = 0, y_1 = 1}$

No vale: anula varios denominadores de la primera ecuación

$x_2 = 1, y_2 = 2$

Funciona en ambas ecuaciones

$\cancel{x_3 = 4, y_3 = -1}$

No funciona en la segunda ecuación -1 = 1 + 2 !!

$$\boxed{\text{Solución única}: x = 1, y = 2}$$

30

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{y}{2}=1+x \\ 1+\sqrt{2y}=2+x \end{cases}$$

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{2}+\frac{y}{2}\cdot\frac{x}{x}=\frac{1+x}{1}\cdot\frac{2x}{2x}$$

$$\sqrt{2y}=1+x$$

$$2+xy=2x+2x^2$$

Elevo al cuadrado:

x2 !!!

$$\underbrace{2y=x^2+2x+1 \qquad 4+2y\cdot x=4x+4x^2}$$

Sustituimos 2y en la otra ecuación:
(hemos evitado denominadores)

$$4+(x^2+2x+1)\cdot x=4x+4x^2$$

$$4+x^3+2x^2+x-4x-4x^2=0$$

$$x^3-2x^2-3x+4=0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -2 & -3 & 4 \\ 1 & & 1 & -1 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -4 & 0 \end{array}$$

$\triangle$ = 1 + 16 = 17 $\Rightarrow$ $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

$$x_1=1, y_1=2$$

Funciona en ambas ecuaciones

$$x_2=2'56\ldots, y_2=6'34\ldots$$

Funciona en ambas ecuaciones

Dos soluciones

$$\cancel{x_3=-1'56\ldots, y_3=0'159\ldots}$$

No funciona en la segunda ecuación

$$x_2=\frac{1+\sqrt{17}}{2}, y_2=\frac{13+3\sqrt{17}}{4}$$