SOLUCIONARIO DE LAS

ECUACIONES EJEMPLARES

DE 3º DE ESO

RECURSOS BÁSICOS PARA TRIUNFAR EN MATEMÁTICAS B DE 4º DE ESO

La gran mayoría de las soluciones se pueden comprobar con facilidad sustituyéndolas en las incógnitas

Antes de quitar denominadores, debemos resolver paréntesis, operadores, productos...

1

ABC

$$1-\frac{x^2-1}{2}\cdot\frac{2x-3}{3}=\frac{x+5}{4}$$

$$1-\frac{2x^3-3x^2-2x+3}{6}=\frac{x+5}{4}$$

$$\frac{12}{12}-\left(\frac{4x^3-6x^2-4x+6}{12}\right)=\frac{3x+15}{12}$$

$$12-4x^3+6x^2+4x-6=3x+15$$

$$-4x^3+6x^2+x-9=0$$

(recomiendo coeficiente lider positivo)

$$4x^3-6x^2-x+9=0$$

	4	-6	-1	9
-1		-4	10	-9
	4	-10	9	0

(a b c)

$\triangle$ = b² - 4ac

$\triangle$ = 100 – 144 < 0

No hay más soluciones

$x=-1$
Solución única

2

ABC

$$3-\left(\frac{x^2-1}{3}\right)\cdot\underbrace{(2x-3)}_{1}=\frac{x+2}{2}$$

$$3-\frac{2x^3-3x^2-2x+3}{3}=\frac{x+2}{2}$$

$$\frac{18}{6}-\left(\frac{4x^3-6x^2-4x+6}{6}\right)=\frac{3x+6}{6}$$

$$18-4x^3+6x^2+4x-6=3x+6$$

$$-4x^3+6x^2+x+6=0$$

$$4x^3-6x^2-x-6=0$$

	4	-6	-1	-6
2		8	4	6
	4	2	3	0

$\triangle$ = 4 - 48 < 0

$x=2$
Solución única

3 $x^6-4x^2=6x^3-3x^5$

$$x^6+3x^5-6x^3-4x^2=0$$

$$x^2\left(x^4+3x^3-6x-4\right)=0$$

	1	3	0	-6	-4
-1		-1	-2	2	4
	1	2	-2	-4	0
-2		-2	0	4	
	1	0	-2	0	

(a b c)

$$x^2-2=0$$

$$x^2=2$$

$\boxed{x_1=0}$

$\boxed{x_2=-1}$

$\boxed{x_3=-2}$

$\boxed{x_4=\sqrt{2}}$ $\boxed{x_5=-\sqrt{2}}$

---

4 ABC

$$\frac{x+1}{2}\cdot\frac{x^2+4}{2}+\frac{3x}{2}\cdot\frac{x+3}{3}=1-2x^4$$

$$\frac{x^3+x^2+4x+4}{4}+\frac{3x^2+9x}{6}=1-2x^4$$

$$\frac{3x^3+3x^2+12x+12}{\cancel{12}}+\frac{6x^2+18x}{\cancel{12}}=\frac{12-24x^4}{\cancel{12}}$$ (no hay “peligro”)

$$24x^4+3x^3+9x^2+30x=0$$

$$x\left(24x^3+3x^2+9x+30\right)=0$$

$\boxed{x_1=0}$

	24	3	9	30
-1		-24	21	-30
	24	-21	30	0

$\boxed{x_2=-1}$

(a b c)

$\triangle$ = 441 - 2880 < 0

No hay más soluciones

5

$$2x^6 = 2x^2 - 5x^3 + 5x^5$$

$$2x^6 - 5x^5 + 5x^3 - 2x^2 = 0$$

$$x^2(2x^4 - 5x^3 + 5x - 2) = 0$$

	2	-5	0	5	-2
1		2	-3	-3	2
	2	-3	-3	2	0
-1		-2	5	-2	
	2	-5	2	0	

(a b c)

$\triangle$ = 25 – 16 = 9

$$x = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$\boxed{x_1 = 0}$

$\boxed{x_2 = 1}$

$\boxed{x_3 = -1}$

$\boxed{x_4 = 2}$ $\boxed{x_5 = 1/2}$

6

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 2}{x - 5} = 1$$

$$x^3 - 3x^2 - 2 = x - 5$$

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

	1	-3	-1	3
1		1	-2	-3
	1	-2	-3	0

$\triangle$ = 4 + 12 = 16 ; $x = \frac{2 \pm 4}{2}$

$\boxed{x_1 = 1}$ $\boxed{x_2 = 3}$ $\boxed{x_3 = -1}$

7

$$x^3 = \frac{-3x}{x^2 - 4}$$

$$x^5 - 4x^3 = -3x$$

$$x^5 - 4x^3 + 3x = 0$$

$$x(x^4 - 4x^2 + 3) = 0$$

Bicuadrada: x²=t

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$\triangle$ = 16 - 12 = 4 ; $t = \frac{4 \pm 2}{2}$

$\boxed{t_1 = 3}$ $\boxed{t_2 = 1}$

$x^2 = 3$ $x^2 = 1$

$\boxed{x_1 = 0}$ $\boxed{x_2 = \sqrt{3}}$ $\boxed{x_3 = -\sqrt{3}}$ $\boxed{x_4 = 1}$ $\boxed{x_5 = -1}$

8 Otra bicuadrada más completa:

$$\frac{x^4-3}{2}-\frac{x-1}{3}\cdot\frac{3x^2+2}{2}=\frac{x-1}{6}-\boxed{x}\cdot\frac{x^2+1}{2}$$

$$\frac{x^4-3}{2}-\frac{x-1}{3}\cdot\frac{3x^2+2}{2}=\frac{x-1}{6}-\boxed{\frac{x}{1}}\cdot\frac{x^2+1}{2}$$

ABC: resolvemos las dos multiplicaciones de fracciones antes de precipitarnos intentando quitar los denominadores

$$\frac{x^4-3}{2}-\frac{3x^3+2x-3x^2-2}{6}=\frac{x-1}{6}-\frac{x^3+x}{2}$$

Igualamos denominadores...

$$\frac{3x^4-9}{6}-\frac{3x^3+2x-3x^2-2}{6}=\frac{x-1}{6}-\frac{3x^3+3x}{6}$$

… y antes de tacharlos: REFLEXIÓN Y PELIGRO! → tachón, reflexión, peligro

$$\frac{3x^4-9}{\cancel{6}}-\left(\frac{3x^3+2x-3x^2-2}{\cancel{6}}\right)=\frac{x-1}{\cancel{6}}-\left(\frac{3x^3+3x}{\cancel{6}}\right)$$

CUANDO TENEMOS UN MENOS DELANTE DE OPERACIONES COMBINADAS, COMO AFECTA A TODO EL RESULTADO, TENEMOS QUE COLOCAR PARÉNTESIS. RECUERDA QUE ES UNO DE LOS FALLOS MÁS HABITUALES EN LOS EXÁMENES Y QUE ARRUINA MULTITUD DE EJERCICIOS.

$$3x^4-9-(3x^3+2x-3x^2-2)=x-1-(3x^3+3x)$$

$$3x^4-9-3x^3-2x+3x^2+2=x-1-3x^3-3x$$

$$3x^4-3x^3+3x^3+3x^2-2x-x+3x+1-9+2=0$$

$$3x^4+3x^2-6=0 \xrightarrow{:3} x^4+x^2-2=0 \xrightarrow{x^2=t} t^2+t-2=0$$

$$t=\frac{-1\pm 3}{2}\begin{cases} t_1=1=x^2 \longrightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{1}=\pm 1} \\ t_2=-2=x^2 \longrightarrow \end{cases}$$

2 soluciones válidas fáciles de comprobar

Imposible deshacer el cambio de variable

9

$$\frac{x^2(7-x^2)}{12}=1-\frac{x(4-x^2)}{6}$$

ABC

$$\frac{7x^2-x^4}{12}=1-\frac{4x-x^3}{6}$$

$$\frac{7x^2-x^4}{\cancel{12}}=\frac{12}{\cancel{12}}-\left(\frac{8x-2x^3}{\cancel{12}}\right)$$

$$7x^2-x^4=12-8x+2x^3$$

$$0=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$$

	1	2	-7	-8	12
1		1	3	-4	-12
	1	3	-4	-12	0
2		2	10	12	
	1	5	6	0	

Δ = 25 – 24 = 1

$$x=\frac{-5\pm 1}{2}$$

$\boxed{x_1=1}$ $\boxed{x_2=2}$ $\boxed{x_3=-2}$ $\boxed{x_4=-3}$

---

10 $\sqrt{-x}-\sqrt{2x+1}+1=0$

(1) Despejo una raíz: $1+\sqrt{-x}=\sqrt{2x+1}$

(2) Elevamos al cuadrado ambos miembros: $1+2\sqrt{-x}+(-x)=2x+1$

(1) Despejo la raíz que queda: $2\sqrt{-x}=3x \xrightarrow{(2)} 4(-x)=9x^2$

$\rightarrow 0=9x^2+4x \rightarrow 0=x(9x+4) \rightarrow \boxed{x_1=0}$ $\cancel{x_2=-4/9}$

Siempre que usemos la técnica de elevar al cuadrado ambos miembros, debemos comprobar que las soluciones sean válidas. Cuando elevamos expresiones al cuadrado, provocamos que términos opuestos se igualen (como con (-4)² = 4²) por lo que aparecen soluciones falsas normalmente

---

11 $\sqrt{x}-\sqrt{2x+1}+1=0 \xrightarrow{(1)} 1+\sqrt{x}=\sqrt{2x+1}$

(2)

$1+2\sqrt{x}+x=2x+1 \xrightarrow{(1)} 2\sqrt{x}=x$

(2)

$4x=x^2 \rightarrow 0=x(x-4) \rightarrow \boxed{x_1=0}$ $\boxed{x_2=4}$

Ambas válidas

12

$$5-\sqrt{x-1}-\sqrt{2x}=2 \xrightarrow{(1)} -\sqrt{2x}=-3+\sqrt{x-1}$$

(2)

$$2x=9-6\sqrt{x-1}+(x-1) \xrightarrow{(1)} x-8=-6\sqrt{x-1}$$

(2)

$$x^2-16x+64=36(x-1)$$

$$x^2-52x+100=0$$

$$\triangle = 2704 - 400 = 1304 = 48^2$$

$$x=\frac{52\pm 48}{2}$$

Solución única: $\boxed{x=2}$ $\cancel{x=50}$

13

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2=0 \xrightarrow{(1)} \sqrt[3]{x}=2-\sqrt{x}$$

(2, ¡al cubo!)

$$x=8-12\sqrt{x}+6x-x\sqrt{x} \xrightarrow{(1)} (x+12)\sqrt{x}=5x+8$$

(2)

$$(x^2+24x+144)x=25x^2+80x+64$$

$$x^3-x^2+64x-64=0$$

	1	-1	64	-64
1		1	0	64
	1	0	64	0

$$x^2 + 64 = 0$$

No hay más soluciones

$\boxed{x=1}$

14

$$2+\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x+5}}{3}+3 \xrightarrow{(1)} 3\sqrt{x}=\sqrt{x+5}+3$$

(2)

$$9x=(x+5)+6\sqrt{x+5}+9 \xrightarrow{(1)} 8x-14=6\sqrt{x+5}$$

$$4x-7=3\sqrt{x+5} \xrightarrow{(2)} 16x^2-56x+49=9(x+5)$$

$$16x^2-65x+4=0 \longrightarrow x=\frac{65\pm 63}{32} \longrightarrow$$ Solo vale: $\boxed{x=4}$

15

$$3+\sqrt{x}-\sqrt{3x+1}=2 \xrightarrow{(1)} 1+\sqrt{x}=\sqrt{3x+1}$$

(2)

$$1+2\sqrt{x}+x=3x+1 \xrightarrow{(1)} 2\sqrt{x}=2x \longrightarrow \sqrt{x}=x$$

(2)

$$x=x^2 \longrightarrow 0=x(x-1) \longrightarrow \boxed{x_1=0} \quad \boxed{x_2=1}$$

(ambas son válidas)

16

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=\sqrt{5-x} \xrightarrow{(2)} (x+5)-2\sqrt{x^2+5x}+x=5-x$$

(1)

$$3x=2\sqrt{x^2+5x} \xrightarrow{(2)} 9x^2=4(x^2+5x)$$

$$5x(x-4)=0 \longrightarrow \boxed{x_1=0} \quad \boxed{x_2=4}$$

(ambas son válidas)

17

$$\sqrt{x+2}+1=\sqrt{4x+1} \xrightarrow{(2)} (x+2)+2\sqrt{x+2}+1=4x+1$$

(1)

$$2\sqrt{x+2}=3x-2 \xrightarrow{(2)} 4(x+2)=9x^2-12x+4$$

$$0=9x^2-16x-4 \longrightarrow \triangle = 256 + 144 = 400 = 20^2$$

$$x=\frac{16\pm 20}{18}$$

Solución única: $\boxed{x=2}$ $\qquad \cancel{x=-2/9}$

Ni 1 ni -1 pueden ser solución:

18 $$\frac{x}{2}-\frac{3(x-1)}{x+1}=\frac{2-x}{x^2-1}$$

Factorizamos los denominadores:

$$\frac{x}{2}-\frac{3(x-1)}{x+1}=\frac{2-x}{(x+1)(x-1)}$$

Igualamos los denominadores, multiplicando arriba y abajo por los factores necesarios:

$$\Delta \quad \frac{x}{\cancel{2}}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{\cancel{(x+1)(x-1)}}-\left(\frac{3(x-1)}{\cancel{x+1}}\cdot\frac{2(x-1)}{\cancel{2(x-1)}}\right)=\frac{2-x}{\cancel{(x+1)(x-1)}}\cdot\frac{2}{\cancel{2}}$$

$$x\cdot(x+1)(x-1)-(3(x-1)\cdot 2(x-1))=(2-x)\cdot 2$$

$$x(x^2-1)-(6(x-1)^2)=4-2x$$

$$x^3-x-(6x^2-12x+6)=4-2x$$

$$x^3-6x^2+13x-10=0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -6 & 13 & -10 \\ 2 & & 2 & -8 & 10 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}$$

Δ = 16 – 20 < 0

No hay más soluciones

$\boxed{x=2 \quad \text{Solución única y válida (1-1=0)}}$

---

19 $$\frac{8}{x-2}-\frac{6}{x}=\frac{4}{x^2-2x}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{8}{x-2}-\frac{6}{x}=\frac{4}{x(x-2)}+\frac{1}{2}$$

$$\Delta \quad \frac{8}{\cancel{x-2}}\cdot\frac{2x}{\cancel{2x}}-\left(\frac{6}{\cancel{x}}\cdot\frac{2(x-2)}{\cancel{2(x-2)}}\right)=\frac{4}{\cancel{x(x-2)}}\cdot\frac{2}{\cancel{2}}+\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{x(x-2)}{\cancel{x(x-2)}}$$

$$8\cdot 2x-(6\cdot 2(x-2))=4\cdot 2+1\cdot x(x-2)$$

$$16x-(12x-24)=8+x^2-2x$$

$$0=x^2-6x-16$$

Δ = 36 + 64 = 100 = 10²

$$x=\frac{6\pm 10}{2}$$

$\boxed{x_1=8}$ $\boxed{x_2=-2}$

20 $\dfrac{x+1}{x+3}-2=x-\dfrac{x-3}{x^2-9}$ → $\underbrace{\dfrac{x+1}{x+3}-2=x-\dfrac{x-3}{(x+3)(x-3)}}$

Otra forma de evitar el "peligro", cambiando de lado los términos que restan:

$$\dfrac{x+1}{x+3}+\dfrac{x-3}{(x+3)(x-3)}=x+2$$

$$\dfrac{(x+1)(x-3)}{\cancel{(x+3)(x-3)}}+\dfrac{x-3}{\cancel{(x+3)(x-3)}}=\dfrac{(x+2)(x+3)(x-3)}{\cancel{(x+3)(x-3)}}$$

$$x^2-2x-3+x-3=(x+2)(x^2-9)$$

$$x^2-x-6=x^3+2x^2-9x-18$$

$$0=x^3+x^2-8x-12$$

	1	1	-8	-12
-2		-2	2	12
	1	-1	-6	0

$\triangle$ = 1 + 24 = 25

$$x=\dfrac{1\pm5}{2}$$

Solución no válida, ya que anula un denominador $\cancel{x_1=3}$

$\boxed{x=-2}$ Solución única

---

21 $\dfrac{x^2-1}{x-3}-2=\dfrac{x-1}{x+2}$ Ya tenemos factorizados los denominadores!

$$\dfrac{(x^2-1)(x+2)}{\cancel{(x-3)(x+2)}}-\left(\dfrac{2(x-3)(x+2)}{\cancel{(x-3)(x+2)}}\right)=\dfrac{(x-1)(x-3)}{\cancel{(x-3)(x+2)}}$$

$$(x^2-1)(x+2)-2(x-3)(x+2)=(x-1)(x-3)$$

$$x^3+2x^2-x-2-2(x^2-x-6)=x^2-4x+3$$

$x^3-x^2+5x+7=0$ →

	1	-1	5	7
-1		-1	2	-7
	1	-2	7	0

$\triangle$ = 4 – 28 < 0 → No hay más soluciones

$\boxed{x=-1}$ Solución única y válida (0-2 = -2)

22

$$\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{3x+2}{x+1} \rightarrow \frac{x\cdot x}{x(x+1)}-\frac{x+1}{x(x+1)}=\frac{x(3x+2)}{x(x+1)}$$

$$x^2-x-1=3x^2+2x$$

$$0=2x^2+3x+1 \rightarrow \triangle = 9-8 = 1 \rightarrow x=\frac{-3\pm1}{4}$$

$\boxed{x=-1/2}$ Solución única, ya que x = -1 anula varios denominadores

---

23

$$\frac{3x}{x^2-4}+2=\frac{x-5}{2}-\frac{x+2}{x-2} \rightarrow \frac{3x}{(x+2)(x-2)}+2=\frac{x-5}{2}-\frac{x+2}{x-2}$$

$$\frac{2\cdot3x}{2(x+2)(x-2)}+\frac{2\cdot2(x+2)(x-2)}{2(x+2)(x-2)}=\frac{(x-5)(x+2)(x-2)}{2(x+2)(x-2)}-\frac{(x+2)\cdot2(x+2)}{2(x+2)(x-2)}$$

$$6x+4(x+2)(x-2)=(x-5)(x+2)(x-2)-2(x+2)(x+2)$$

$$0=x^3-11x^2-18x+28$$

$\boxed{x_1=1}$ $\boxed{x_2=5+\sqrt{53}}$ $\boxed{x_3=5-\sqrt{53}}$

	1	-11	-18	28
1		1	-10	-28
	1	-10	-28	0

$\rightarrow \triangle = 100 + 112 = 212$; $x=\frac{10\pm\sqrt{212}}{2}$

24

$$\frac{4}{x}-\frac{3x-1}{x+3}=\frac{x}{2} \rightarrow \frac{4\cdot2\cdot(x+3)}{x\cdot2\cdot(x+3)}-\frac{2x(3x-1)}{2x(x+3)}=\frac{x\cdot x(x+3)}{2x(x+3)}$$

$$8x+24-6x^2+2x=x^3+3x^2 \rightarrow 0=x^3+9x^2-10x-24$$

	1	9	-10	-24
2		2	22	24
	1	11	12	0

$\rightarrow \triangle = 121 - 48 = 73$; $x=\frac{-11\pm\sqrt{73}}{2}$

$\boxed{x_1=2}$ $\boxed{x_2=\frac{-11+\sqrt{73}}{2}}$ $\boxed{x_3=\frac{-11-\sqrt{73}}{2}}$

25

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 3 - \sqrt{1-y+x} \\ 3x+1 = y^2 \end{cases}$$

Antes de realizar sustitución, conviene quitarse las complicaciones que aparezcan

$$x = 9 - 6\sqrt{1-y+x} + (1-y+x)$$

$$3x = y^2 - 1$$

x12

Elevamos al cuadrado: (soluciones falsas probablemente)

$$6\sqrt{1-y+x} = 10 - y$$

$$36(1-y+x) = 100 - 20y + y^2$$

$$36x = 12y^2 - 12 \qquad 36x = 64 + 16y + y^2$$

IGUALACIÓN

$$12y^2 - 12 = 64 + 16y + y^2$$

$$11y^2 - 16y - 76 = 0$$

$$y = \frac{16 \pm 60}{22}$$

-

$$\boxed{x_1 = 1,\ y_1 = -2}$$

+

$$\boxed{x_2 = 441/121,\ y_2 = 38/11}$$

Y ambas son válidas!

26

$$\begin{cases} \sqrt{x} + y = 3 \\ \dfrac{x+2}{3} - 1 = y^2 \end{cases}$$

Siempre atentos a las soluciones falsas si elevamos al cuadrado ambos miembros

$$\sqrt{x} = 3 - y$$

$$(\sqrt{x})^2 = (3-y)^2$$

$$x = y^2 - 6y + 9$$

Sustituyo:

$$\frac{y^2 - 6y + 9 + 2}{3} - 1 = y^2$$

$$\frac{y^2 - 6y + 11}{3} - \frac{3}{3} = \frac{3y^2}{3} \Rightarrow 0 = 2y^2 + 6y - 8 \Rightarrow 0 = y^2 + 3y - 4$$

$\triangle$ = 9 + 16 = 25 ; $y = \dfrac{-3 \pm \sqrt{25}}{2}$

+

$$\boxed{y_1 = 1 \qquad x_1 = 4}$$

-

$$\boxed{y_2 = -4 \quad x_2 = 49}$$

Válidas ambas

27

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}=3 \\ \dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{2}=y-x-2 \end{cases}$$

$$x-\sqrt{y}=3 \rightarrow x-3=\sqrt{y} \rightarrow \boxed{x^2-6x+9=y}$$

Nos quitamos el problema de la raíz desde el principio, y de paso tenemos despejada una incógnita, lista para aplicar sustitución

Pero antes de aplicar la sustitución, parece razonable que simplifiquemos la segunda ecuación, sabiendo que x=0 no es una opción válida porque anula el denominador del primer término

$$\frac{y}{x}-\frac{1}{2}=y-x-2 \rightarrow \frac{y}{x}\cdot\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x}=(y-x-2)\cdot\frac{2x}{2x}$$

$$2y-x=2xy-2x^2-4x \rightarrow 2y-x=2xy-2x^2-4x$$

$$\rightarrow 2y-2xy=x-2x^2-4x \rightarrow 2y(1-x)=-2x^2-3x$$

Hemos dejado una sola "y" para que sustituir sea más fácil:

$$2(x^2-6x+9)(1-x)=-2x^2-3x$$

$$2(x^2-6x+9-x^3+6x^2-9x)=-2x^2-3x$$

$$2(-x^3+7x^2-15x+9)=-2x^2-3x$$

$$-2x^3+14x^2-30x+18+2x^2+3x=0$$

$$-2x^3+16x^2-27x+18=0 \rightarrow$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -2 & 16 & -27 & 18 \\ 6 & & -12 & 24 & -18 \\ \hline & -2 & 4 & -3 & 0 \end{array}$$

$\triangle = 16 - 24 < 0$

No hay más soluciones en "x"

Como teníamos que: $y=x^2-6x+9$

$$y=6^2-6\cdot 6+9$$

$$\boxed{x=6 \qquad y=9}$$

28

$$\begin{cases} \dfrac{y-1}{x-1}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{y}{x^2-1} \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$$

Vamos a empezar por "simplificar" la primera ecuación, donde ni x=1 ni x=-1 pueden ser solución

$$\frac{y-1}{x-1}+\frac{1}{3}=\frac{y}{(x+1)(x-1)}$$

El m.c.m. de los denominadores es 3·(x-1)·(x+1). Multiplicamos cada fracción arriba y abajo por todos los factores que le falten en el denominador, para igualarlos

$$\frac{y-1}{x-1}\cdot\frac{3(x+1)}{3(x+1)}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{y}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{3}{3}$$

$$3xy+\cancel{3y}-3x-3+x^2-1=\cancel{3y} \rightarrow \begin{cases} 3xy-3x-3+x^2-1=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$$

Nuestro sistema ha quedado:

Está claro que no hay manera de aplicar reducción. Y si despejo cualquier incógnita de la segunda ecuación, me voy a ver obligado a meter raíces con sus problemas

Mejor despejar la "y" de la primera ecuación: $3xy=3x+x^2+4 \rightarrow \boxed{y=\dfrac{-x^2+3x+4}{3x}}$

con $x\neq\pm1$

(no se puede descartar que x=0, porque en el sistema de partida no daba problemas)

Sustituimos en la otra ecuación:

$$x^2+\left(\frac{-x^2+3x+4}{3x}\right)^2=5 \rightarrow 9x^4+(-x^2+3x+4)^2=45x^2$$

$$\rightarrow 9x^4+x^4-3x^3-4x^2-3x^3+9x^2+12x-4x^2+12x+16=45x^2$$

$$\rightarrow 10x^4-6x^3-44x^2+24x+16=0 \rightarrow$$

Cuando los coeficientes suman 0, el 1 siempre triunfa

$$\begin{array}{c|ccccc} & 5 & -3 & -22 & 12 & 8 \\ \cancel{1} & & 5 & 2 & -20 & -8 \\ \hline & 5 & 2 & -20 & -8 & \multicolumn{1}{|c}{0} \\ 2 & & 10 & 24 & 8 & \\ \hline & 5 & 12 & 4 & \multicolumn{1}{|c}{0} & \end{array}$$

$$x=\frac{-12\pm8}{10}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x_1=2,\ y_1=1 \\ x_2=-2,\ y_2=1 \\ x_3=-2/5,\ y_3=-11/5 \end{array}}$$

UNO DE LOS SISTEMAS MÁS BELLOS CONOCIDOS

29

$$\begin{cases} \dfrac{2y}{x+1}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{y-2}{x^2+x} \\ y=1+\sqrt{x} \end{cases}$$

$$\frac{2y}{x+1}-\frac{y}{x}=\frac{y-2}{x(x+1)}$$

$$\frac{2y}{x+1}\cdot\frac{x}{x}-\frac{y}{x}\cdot\frac{x+1}{x+1}=\frac{y-2}{x(x+1)}$$

$$2xy-xy-y=y-2$$

$$xy-2y=-2$$

$$y-1=\sqrt{x}$$

Elevo al cuadrado:

$$y^2-2y+1=x$$

Sustituimos x en la otra ecuación:

$$(y^2-2y+1)y-2y=-2$$

$$y^3-2y^2+y-2y+2=0$$

$$y^3-2y^2-y+2=0$$

	1	-2	-1	2
1		1	-1	-2
	1	-1	-2	0

$\triangle$ = 1 + 8 = 9 $\Rightarrow$ $y=\dfrac{1\pm 3}{2}$

$\cancel{x_1=0,\ y_1=1}$

No vale: anula varios denominadores de la primera ecuación

$x_2=1,\ y_2=2$

Funciona en ambas ecuaciones

$\cancel{x_3=4,\ y_3=-1}$

No funciona en la segunda ecuación -1 = 1 + 2 !!

$$\boxed{\text{Solución única}: x=1,\ y=2}$$

30

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{y}{2}=1+x \\ 1+\sqrt{2y}=2+x \end{cases}$$

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{2}+\frac{y}{2}\cdot\frac{x}{x}=\frac{1+x}{1}\cdot\frac{2x}{2x}$$

$$\sqrt{2y}=1+x$$

$$2+xy=2x+2x^2$$

Elevo al cuadrado:

x2 !!!

$$\underbrace{2y=x^2+2x+1 \qquad 4+2y\cdot x=4x+4x^2}$$

Sustituimos 2y en la otra ecuación:
(hemos evitado denominadores)

$$4+(x^2+2x+1)\cdot x=4x+4x^2$$

$$4+x^3+2x^2+x-4x-4x^2=0$$

$$x^3-2x^2-3x+4=0$$

	1	-2	-3	4
1		1	-1	-4
	1	-1	-4	0

$\triangle$ = 1 + 16 = 17 $\Rightarrow$ $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

$$x_1=1,\ y_1=2$$

Funciona en ambas ecuaciones

$$x_2=2'56\ldots,\ y_2=6'34\ldots$$

Funciona en ambas ecuaciones

Dos soluciones

$$\cancel{x_3=-1'56\ldots,\ y_3=0'159\ldots}$$

No funciona en la segunda ecuación

$$x_2=\frac{1+\sqrt{17}}{2},\ y_2=\frac{13+3\sqrt{17}}{4}$$