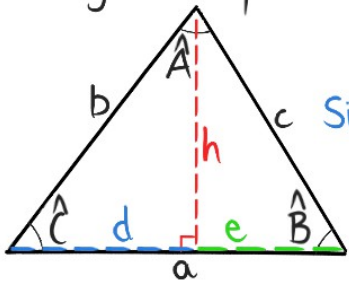


# GEOMETRÍA 10

Aquí tenemos un triángulo cualquiera:



Sabemos que  $\text{sen } \hat{C} = h/b$   
y  $\text{sen } \hat{B} = h/c$

Si despejo "h" de ambas igualdades tengo

$$h = b \cdot \text{sen } \hat{C} = c \cdot \text{sen } \hat{B}$$

Por lo tanto

Y haciendo lo mismo con otra altura:

$$\frac{\text{sen } \hat{A}}{a} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{b} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{c} \quad \text{TEOREMA DEL SENO}$$

También sabemos que  $\text{cos } \hat{C} = d/b$

Por lo que:  $d = b \cdot \text{cos } \hat{C}$

y también:  $e = a - d = a - b \cdot \text{cos } \hat{C}$

Ya tenemos "d" y "e" en función de "a", "b" y "cos C"

Pues si aplicamos el teorema de Pitágoras a los dos triángulos rectángulos que separa "h", despejamos "h<sup>2</sup>"

de ambas expresiones e igualamos, tendremos:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \text{cos } \hat{C} & b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \text{cos } \hat{B} \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \text{cos } \hat{A} & & \end{aligned} \quad \text{TEOREMA DEL COSENO}$$

El teorema del seno nos asegura que los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos

El teorema del coseno nos permitirá obtener cualquier ángulo del triángulo conocidos sus lados, o hallar el lado que falta si tenemos algún ángulo

Hagamos unos problemas con todo lo visto de trigonometría

Ana y Pablo observan un globo. Ana lo ve con un ángulo de inclinación de  $75^\circ$ . Pedro está 20 metros más cerca y lo mira con un ángulo de  $80^\circ$ . ¿A qué altura vuela el globo?

Por el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen } 5^\circ}{20} = \frac{\text{sen } 75^\circ}{a}$$

$$a \cdot \text{sen } 5^\circ = 20 \cdot \text{sen } 75^\circ$$

Con la ayuda de la calculadora:

$$a = 20(0.966)/0.087 = 221.66\text{m}$$

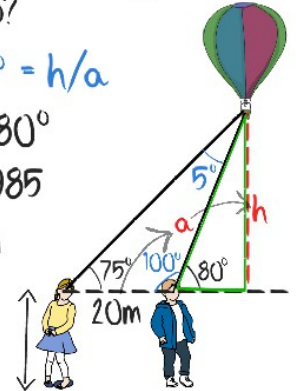
Vuela a casi 220m de altura

Como  $\text{sen } 80^\circ = h/a$

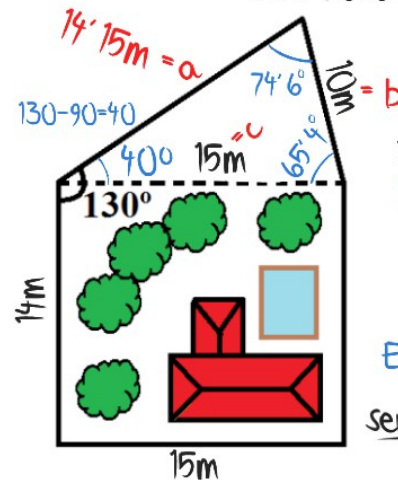
$$h = a \cdot \text{sen } 80^\circ$$

$$h = 221.66 \cdot 0.985$$

$$h \approx 218.3\text{m}$$



Juan quiere comprar la alambrada para vallar su casa, pero solo tiene el siguiente plano en la tienda:



Por el teorema del coseno:

$$10^2 = a^2 + 15^2 - 2a \cdot 15 \cdot \text{cos } 40^\circ$$

Puedo resolver esa horrible ecuación de segundo grado en "a"

Pero será mejor usar el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen } \hat{C}}{15} = \frac{\text{sen } 40^\circ}{10}; \text{sen } \hat{C} = 0.964; \hat{C} = 74.6^\circ$$

Ojo Si fuese obtuso sería  $105.4^\circ$

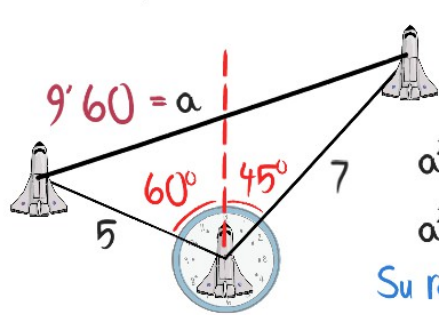
El ángulo que falta será  $180 - 40 - 74.6 = 65.4^\circ$

$$\frac{\text{sen } 65.4^\circ}{a} = \frac{\text{sen } 40^\circ}{10} \quad \text{Despejando } a = 14.15\text{m}$$

Juan tiene que comprar 67.15m de alambrada

$$(14 + 14 + 15 + 10 + 14.15)$$

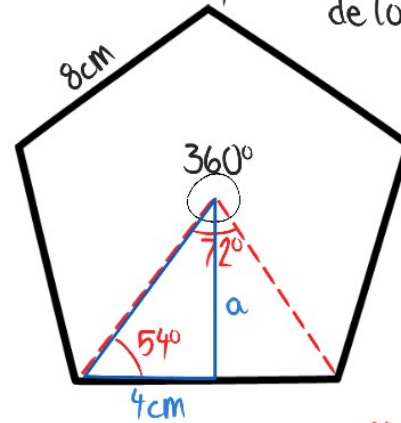
A un piloto le dice el radar que hay dos aviones a su misma altura: uno "a las diez", a 5 km, y otro "a la una y media", a 7 km. ¿Qué distancia habrá entre ellos?



Así que, el ángulo  $\hat{A} = 105^\circ$   
 Por el teorema del coseno:  
 $a^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos 105^\circ$   
 $a^2 = 25 + 49 - (-18,12) = 92,12$   
 Su raíz es 9'60 aproximadamente

Los aviones se encuentran a 9'60 km entre ellos

Ni siquiera necesitamos ya, que nos den la apotema de los polígonos regulares



$$360/5 = 72$$

$$(180-72)/2 = 54$$

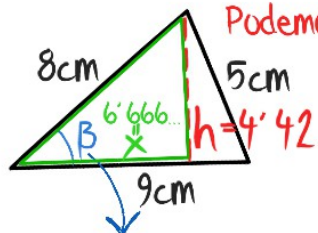
$$\text{tg } 54^\circ = a/4 \Rightarrow a = 4 \cdot \text{tg } 54^\circ = 5,51 \text{ cm}$$

Al no ser una razón notable, necesitaremos la calculadora:

$$\text{Si te fijas } a = \text{tg}((180-360/n)/2) \cdot l/2$$

Con cierto dominio de la trigonometría, no necesitaremos estudiar fórmulas tan feas

Halla el área del siguiente triángulo sin calculadora



Podemos hallar su coseno con el teorema del coseno:

$$5^2 = 8^2 + 9^2 - 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \cos \beta$$

$$25 = 64 + 81 - 144 \cos \beta$$

$$\cos \beta = (25 - 64 - 81) / -144 = 0,8333...$$

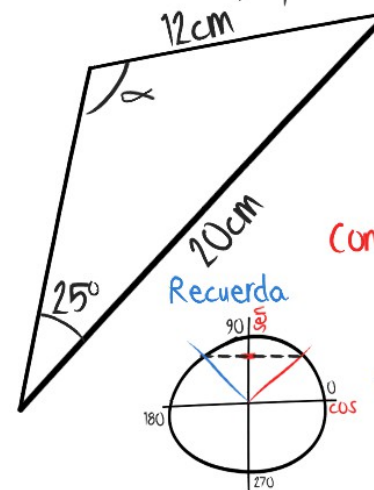
Podríamos obtener el seno por la relación fundamental de la trigonometría. Pero usaremos otra táctica. Hallemos "x"

$$\cos \beta = x/8; \quad x = 8 \cos \beta = 6,666... = 20/3$$

$$\text{Aplicando el teorema de Pitágoras } h = 4,42 \text{ cm} \quad A = \frac{9 \cdot 4,42}{2} = 19,9 \text{ cm}^2$$

Si tuviese el seno de ese ángulo, ya tendría resuelto mi problema (h/8)

Por último, ten cuidado con los triángulos obtusángulos cuando apliques el teorema del seno. Veamos un ejemplo



Halla el ángulo  $\alpha$   
 Por el teorema del seno:

$$\frac{\sin \alpha}{20} = \frac{\sin 25^\circ}{12}$$

Con la calculadora obtendremos:

$$\sin \alpha = 0,704 \Rightarrow \alpha = 44,78^\circ$$

Pero a simple vista es un resultado absurdo. El ángulo que buscamos es su suplementario:

$$180 - 44,78 = 135,22^\circ = \alpha$$