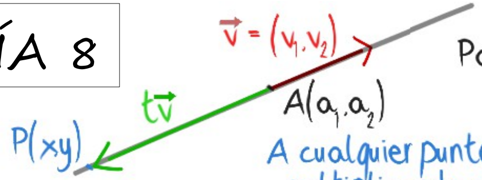
GEOMETRÍA 8



Para definir una recta bastan un punto y una dirección (un vector)

A cualquier punto de esa recta se podrá llegar desde A, multiplicando el vector por el parámetro adecuado (t)

Así tenemos nuestra primera ecuación:

$$\boxed{(x, y) = (a_1, a_2) + t(v_1, v_2)}$$

ECUACIÓN VECTORIAL

Dándole valores a t, podemos conseguir todos los puntos de la recta

TENIENDO UN PUNTO Y UN VECTOR DE LA RECTA, ESTAS ECUACIONES SE CREAN INMEDIATAMENTE

Separando la ecuación por coordenadas:

PRIMERA COORDENADA: $x = a_1 + tv_1$

SEGUNDA COORDENADA: $y = a_2 + tv_2$

$$\boxed{\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}}$$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Despejando "t" de ambas ecuaciones $\begin{cases} x - a_1 = tv_1 \\ y - a_2 = tv_2 \end{cases}$

Las "uves" pasan dividiendo

$$t = \boxed{\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}}$$

ECUACIÓN CONTINUA

Cambio v_2 de miembro $\Rightarrow$ $\frac{v_2(x - a_1)}{v_1} = y - a_2$

$\frac{v_2}{v_1}$ = m = pendiente

ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE $\boxed{y - a_2 = m(x - a_1)}$

Desaparecen las coordenadas del vector, y dejan paso a la pendiente

Despejo "y", ordeno y reduzco, y llego a la expresión conocida:

$$\boxed{y = mx + n}$$

ECUACIÓN EXPLÍCITA

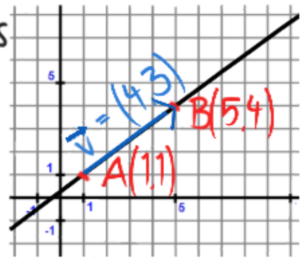
Y con el punto P(0,n), y el vector (1, m), podemos volver a la ecuación vectorial

Y desde todas ellas podemos llegar a la ECUACIÓN GENERAL

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

Basta con llevarse todo a un miembro, ordenar y reducir

Hagamos un ejercicio. Hallemos todas las ecuaciones que hemos visto, de la siguiente recta:



Ya tenemos un punto y un vector de la recta

ECUACIÓN VECTORIAL: $\boxed{(x, y) = (1,1) + t(4,3)}$

SEPARO

ECUACIONES PARAMÉTRICAS: $\boxed{\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 + 3t \end{cases}}$

DESPEJO "t" DE AMBAS E IGUALO

ECUACIÓN CONTINUA: $\boxed{\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{3}}$

DESPEJO "y-1"

ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE

$y - 1 = 3(x-1)/4$

$\boxed{y - 1 = 0'75(x - 1)}$

DESPEJO "y" ORDENO Y REDUZCO

ECUACIÓN EXPLÍCITA

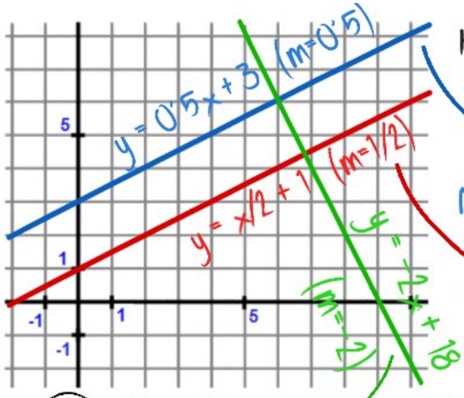
$y = 0'75x - 0'75 + 1$

$\boxed{y = 0'75x + 0'25}$

ECUACIÓN GENERAL: TODO A UN MIEMBRO, ORDENADO Y REDUCIDO. Desde la continua, tenemos $3(x-1) = 4(y-1)$; $3x - 3 = 4y - 4$; $\boxed{3x - 4y + 1 = 0}$

Ya vimos en el segundo vídeo de funciones las condiciones de paralelismo y perpendicularidad en las ecuaciones explícitas $\Rightarrow$ Sean dos rectas con pendientes m_1 y m_2

- Si $m_1 = m_2$, las rectas son PARALELAS
- Si $m_1 = -1/m_2$, son PERPENDICULARES



Hallemos sus ecuaciones generales para ver cómo se traducen esas condiciones

$-0'5x + y - 3 = 0$

Multiplicando por dos: $-x + 2y - 6 = 0$

$-x/2 + y - 1 = 0$

Multiplicando por dos: $-x + 2y - 2 = 0$

Dos rectas son PARALELELAS si sus coeficientes "A" y "B" son proporcionales

$2x + y - 18 = 0$

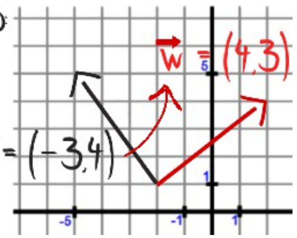
Dos rectas son PERPENDICULARES si: $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$

$\boxed{-2 + 2 = 0}$ ✓

Esas propiedades son muy parecidas a las que comparten los vectores. Sean dos vectores $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $\vec{w} = (w_1, w_2)$

- Si sus coordenadas son proporcionales, es decir, si: $\frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2}$ $\Rightarrow$ SON PARALELOS
- Si $v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 = 0$ $\Rightarrow$ SON PERPENDICULARES

Es muy fácil crear un vector perpendicular a otro: basta con darle la vuelta a las coordenadas, y cambiarle el signo a una de ellas



Y, efectivamente, forman 90°

y $-3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 0$

Ejercicio 1: Halla una recta perpendicular a $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{-4}$ que pase por el punto $A(2,5)$

Nos han presentado la ecuación continua, y los valores del denominador son las coordenadas del vector de la recta. Para que sea perpendicular, les damos la vuelta y le cambiamos el signo a uno de ellos

$$\frac{x-5}{4} = \frac{y+4}{3} \longrightarrow \boxed{\frac{x-2}{4} = \frac{y-5}{3}}$$

Y recordemos que los valores que restan a las incógnitas son las coordenadas del punto de la recta. Podemos cambiarlas por las coordenadas del punto de paso que nos piden

Ejercicio 2: Estudia si las rectas anteriores son paralelas a la recta: $-6x + 8y - 1 = 0$

Podemos hallar las pendientes, un vector de cada recta, o, como haremos, trabajar con las ecuaciones generales

$-4x + 20 = 3y + 12$; $\underline{-4x - 3y + 8 = 0}$

$3x - 6 = 4y - 20$; $\underline{3x - 4y + 14 = 0}$

La primera recta es perpendicular, ya que: $-4(-6) + 8(-3) = 24 - 24 = 0$

La segunda recta es paralela, ya que:

$$\frac{-6}{3} = \frac{8}{-4} = -2$$