

CÁLCULO 4

Como 12 entre 4 es una división exacta (con resto 0):

12 es un MÚLTIPLO de 4 porque existe un número natural que, al multiplicarlo por 4, da 12 ($4 \times 3 = 12$)

4 es un DIVISOR de 12 porque $12:4$ es una división exacta

Por todo ello, decimos que 12 es divisible entre 4

Los CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD son sencillas reglas que nos ayudan a descubrir ciertos divisores, sin necesidad de realizar división alguna.

Un número es divisible por 2 si es par (termina en 0, 2, 4, 6 u 8)

Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es un múltiplo de 3

Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras es un múltiplo de 9

Un número es divisible por 5 si acaba en 0 o 5

Un número es divisible por 10 (100, 1000...) si acaba en 0 (00, 000...)

Un número es divisible entre 11 si la diferencia entre la suma de sus cifras en posición impar (unidades, centenas...), y la suma de sus cifras en posición par (decenas, unidades de millar...) es 0 o múltiplo de 11

39490 Acaba en 0, luego es múltiplo de 2, de 5 y de 10

$3+4+0 = 7$ $3+9+4+9+0 = 25$, luego ni es múltiplo de 3 ni de 9

$9+9 = 18$ $18 - 7 = 11$, luego es múltiplo de 11

73521 Acaba en 1, luego no es múltiplo de 2, ni de 5 ni de 10

$7+5+1 = 13$ $7+3+5+2+1 = 18$, luego es múltiplo de 3 y de 9

$3+2 = 5$ $13-5 = 8$, luego no es múltiplo de 11

Un número es PRIMO si solo tiene dos divisores el 1 y sí mismo

Hay infinitos números primos. Conviene saber que son primos 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59...

FACTORIZAR consiste en escribir un número como producto de números primos. Es tremendamente útil.

Para hallar el m.c.d. (12, 18, 24), podemos usar dos métodos

Exploro los divisores del menor, empezando de mayor a menor, hasta que encuentre un divisor de los otros números

12 es el menor de los tres. Su mayor divisor es 12, pero no es divisor de los otros. Luego viene el 6, que sí es divisor de los otros

$m.c.d. (12, 18, 24) = 6$

Factorizo todos los números y nos quedamos con los factores COMUNES al MENOR exponente

$12 = 2^2 \cdot 3$

$18 = 2 \cdot 3^2$ Los factores que se repiten en los tres números son 2 y 3.

$24 = 2^3 \cdot 3$

Sus menores exponentes son "1"

$m.c.d. (12, 18, 24) = 2 \times 3 = 6$

Para hallar el m.c.m. (12, 18, 24), podemos usar dos métodos

Exploro los múltiplos del mayor, empezando desde el menor, hasta que encuentre un múltiplo de los otros números

24 es el mayor de los tres. Su menor múltiplo es 24, pero no es múltiplo de los otros. 48 tampoco sirve. Luego viene el 72, que sí es múltiplo de los demás

$m.c.m. (12, 18, 24) = 72$

Factorizo todos los números y nos quedamos con TODOS los factores al MAYOR exponente

$12 = 2^2 \cdot 3$ Tenemos factores "2" y "3", y sus mayores exponentes son 3 y 2 respectivamente

$18 = 2 \cdot 3^2$

$24 = 2^3 \cdot 3$

son 3 y 2 respectivamente

$m.c.m. (12, 18, 24) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

Para números pequeños conviene el primer método

Factoricemos primero los números 250, 81, 240 y 1705

$$\begin{array}{r|l}
 250 & 2 \\
 & 5 \\
 25 & 5 \\
 5 & 5 \\
 1 & \\
 \hline
 250 & = 2 \cdot 5^3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 81 & 3 \\
 27 & 3 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 & \\
 \hline
 81 & = 3^4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 240 & 2 \\
 & 5 \\
 24 & 2 \\
 12 & 2 \\
 6 & 2 \\
 3 & 3 \\
 1 & \\
 \hline
 240 & = 2^4 \cdot 3 \cdot 5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 1705 & 5 \\
 341 & 11 \\
 31 & 31 \\
 1 & \\
 \hline
 1705 & = 5 \cdot 11 \cdot 31
 \end{array}$$

$$250 = 2 \cdot 5^3 \quad 81 = 3^4 \quad 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \quad 1705 = 5 \cdot 11 \cdot 31$$

Halla: $\text{m.c.d.}(240, 250) = 2 \cdot 5 = 10$

$\text{m.c.d.}(250, 81) = 1$ (ya que no hay factores en común)

$\text{m.c.d.}(240, 250, 1705) = 5$ (que es el único factor que comparten los 3)

$\text{m.c.m.}(81, 240) = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 = 6480$

$\text{m.c.m.}(250, 81) = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^3 = 250 \cdot 81 = 20250$

$\text{m.c.m.}(250, 81, 240, 1705) = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 31 = 55242000$

Con todo lo dicho, queda claro que entre dos números que tengan una relación múltiplo-divisor, el m.c.m. de ambos es el mayor de ellos y el m.c.d. de ambos es el menor

Por ejemplo, el $\text{m.c.m.}(6, 12) = 12$, y el $\text{m.c.d.}(6, 12) = 6$

Y por último, una curiosa relación:

Sean "a" y "b" dos números naturales cualesquiera:

$$\text{m.c.m.}(a, b) \cdot \text{m.c.d.}(a, b) = a \cdot b$$

Ejemplo: $\text{m.c.d.}(12, 18) = 6$

$\text{m.c.m.}(12, 18) = 36$

Y... $12 \cdot 18 = 6 \cdot 36 = 216$

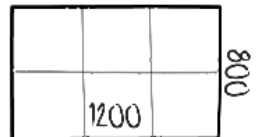
Veamos cómo podemos emplearlo en resolver ciertos problemas

¿Cómo puedo partir mi finca de 800m de ancho y 1200m de largo para que queden parcelas cuadradas, lo más grandes posibles, para diversos cultivos?

Buscamos el divisor común más grande de 800 y 1200:

$$\text{m.c.d.}(800, 1200) = 400$$

Podemos partirla en 6 parcelas cuadradas de 400m de lado



¿Cuántos caramelos debo comprar si quiero hacer un reparto exacto, y no sé si vendrán 8, 10 o 12 amigos?

Busco múltiplos comunes de 8, 10 y 12. Busquemos el más bajo, no vayamos a salirnos del presupuesto del cumpleaños: $\text{m.c.m.}(8, 10, 12) = 120$

Mientras el número de caramelos sea un múltiplo de 120, nuestro reparto será exacto. Cuidado con las caries!