PROPORCIONALIDAD 1

CHICLES	CÉNTIMOS
1	5
2	10
3	15
4	20
...	...

$\times 5$ $\quad$ $\times 0'2$

Todos estos procesos se caracterizan por que el cociente entre las magnitudes se mantiene siempre constante

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{4}{20} = 0'2 \text{ chicles por céntimo}$$

$$\boxed{\frac{5}{1} = \frac{10}{2}} = \frac{15}{3} = \frac{20}{4} = 5 \text{ céntimos por chicle}$$

0'2 y 5 serían las constantes de proporcionalidad directa

Sirven para pasar de una magnitud a la otra

Recordemos que dos fracciones eran iguales o equivalentes si... $5 \times 2 = 1 \times 10$

En una tabla de proporcionalidad directa todos los productos "en cruz" son iguales

Esta propiedad será muy útil para resolver problemas de proporcionalidad directa

---

Problema 1:

Dos personas pintan cinco metros de muro en una hora ¿Cuántos metros podrán pintar 13 personas en una hora?

PERSONAS	METROS
2	5
13	x

$\cdot 2'5$

$$2x = 65$$

$$x = 65/2 = 32'5$$

Es un problema de proporcionalidad directa, ya que el doble de personas pintarán el doble de metros

Podrán pintar 32 metros y medio

También podríamos haber usado la constante de proporcionalidad directa para resolver el problema

$$5/2 = 2'5$$

$$x = 13 \cdot 2'5 = 32'5$$

Los dos métodos son válidos para solucionar un problema de proporcionalidad directa. Si es fácil obtener la constante de proporcionalidad, puede ser el camino más recomendable

Problema 2:

¿Cuánto me cobrarán por 7kg. de patatas, sabiendo que, si cojo 2 kilogramos más, me cobrarán 1 euro más?

La técnica de multiplicar en cruz e igualar es comúnmente conocida como REGLA DE TRES

kg.	€
7	x
9	x+1

Vuelve a ser un problema de proporcionalidad directa, ya que, si compro el doble de kilogramos de patatas, me cobrarán el doble

En este caso, es imposible obtener la constante de proporcionalidad

$$7(x+1) = 9x$$

$$7x + 7 = 9x$$

$$7x - 9x = -7$$

$$-2x = -7$$

$$x = -7/-2 = 3'5$$

Me cobrarán tres euros y medio

Antes de hablar de porcentajes, debemos recordar cómo actuaban las fracciones como operador:

Si queremos calcular dos tercios de 18, simplemente debemos multiplicar 2/3 por 18 $\Rightarrow \frac{2}{3} \cdot 18 = \frac{2 \cdot 18}{3} = 36/3 = 12$

Los porcentajes no son más que un caso particular de fracciones que actúan como operador $\Rightarrow$ 23% = 23/100

$$23\% \text{ de } 20 = 23/100 \text{ de } 20 = \boxed{\frac{23}{100} \cdot 20} = \frac{23 \cdot 20}{100} = 460/100 = 4'6$$

$$40\% \text{ del } 25\% \text{ de } 32 = \frac{40}{100} \cdot \frac{25}{100} \cdot 32 = \frac{40 \cdot 25 \cdot 32}{100 \cdot 100} = \frac{32000}{10000} = 3'2$$

Ciertos porcentajes equivalen a fracciones muy comunes. Basta con simplificar para descubrirlo

$$50\% = \cancel{50}/\cancel{100} = 5/10 = 1/2$$

$$40\% = 40/100 = 4/10 = 2/5$$

$$25\% = 25/100 = 5/20 = 1/4$$

$$20\% = 20/100 = 2/10 = 1/5$$

$$10\% = 10/100 = 1/10$$

Es muy recomendable que domines estas equivalencias, porque se usan con mucha frecuencia en ambas formas

Y el 33% es muy cercano a 33/99 = 3/9 = 1/3, por lo que el 33% es aproximadamente igual a 1/3

Los porcentajes son muy usados para efectuar aumentos (impuestos) y descuentos (rebajas)

Si me van a descontar un 20% de un pantalón que vale 50€, puedo calcular el 20% de 50 y restárselo a 50

$$20\% \text{ de } 50 = \frac{20 \cdot 50}{100} = 1000/100 = 10 \Rightarrow 50 - 10 = 40€$$

Pero, en estos casos, resulta conveniente calcular directamente el 80% ($\underline{100-20}$) de 50, que es realmente el porcentaje que pagaremos

$$80\% \text{ de } 50 = \frac{80 \cdot 50}{100} = 4000/100 = 40€$$

Obtenemos directamente el precio del pantalón rebajado

Si tenemos que añadir el IVA (21%) a un producto que queremos vender a 13€, calculamos directamente el 121% ($\underline{100+21}$) de 13

$$121\% \text{ de } 13 = \frac{121 \cdot 13}{100} = 15'73€$$

Tendremos que ponerlo a la venta a 15'73€ para destinar al Estado 2'73€ de impuestos

Demos diferenciar tres casos muy diferentes

Calcular un 20% de 75	Reducir 75 un 20% 100 − 20 = 80 CALCULAR UN 80%	Aumentar 75 un 20% 100 + 20 = 120 CALCULAR UN 120%
$75 \cdot \frac{20}{100} = 15$	$75 \cdot \frac{80}{100} = 60$	$75 \cdot \frac{120}{100} = 90$

¿Y si queremos deshacer una variación porcentual? ¿Cuánto valía la raqueta antes de las rebajas?

Tenemos tres opciones para calcular el precio original

Como con un 30% de rebaja, pago un 70% (100−30)...

Con una regla de tres	O resuelvo la ecuación:	O simplemente, como quiero deshacer una variación, en vez de multiplicar...
€ % 35 70 x 100	$x \cdot \frac{70}{100} = 35$	$35 : \frac{70}{100} = \frac{35 \cdot 100}{70} = 50€$

Los tres caminos son válidos y siempre obtenemos la misma solución

Una casa vale 110.000 € después de revalorizarse un 5% durante tres años ¿Cuánto valía antes?

mediante ecuación
x: precio original

$$x \cdot \frac{105}{100} \cdot \frac{105}{100} \cdot \frac{105}{100} = 110000 \Rightarrow x = \frac{110000 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100}{105 \cdot 105 \cdot 105} = 95.022'14€$$

En un pueblo había 1200 habitantes en 2011
En 2012 se incrementó la población un 20% → 120%
y en 2013 disminuyó un 10% → 90%
¿Cuántos habitantes había al empezar el 2014?

$$\frac{90}{100} \cdot \frac{120}{100} \cdot 1200 = \frac{120 \cdot 90 \cdot 1200}{100 \cdot 100} = 1296$$

$\boxed{\text{Había 1296 habitantes}}$

¿Qué variación porcentual tuvo esos dos años?

Para problemas de porcentajes más complejos, siempre podemos recurrir a resolverlos como problemas de proporcionalidad directa, ya que al doble de porcentaje le corresponderá doble de cantidad

	POBLACIÓN	PORCENTAJE
INICIAL:	1200	100
FINAL:	1296	x

El porcentaje inicial siempre será 100 para que podamos apreciar la variación

Multiplicamos en cruz e igualamos

$$1200x = 129600$$

$$x = 129600/1200 = 108$$

Si el porcentaje final es del 108%, eso indica un incremento del 8%

Este problema pone de relieve que las variaciones porcentuales <u>nunca deben sumarse</u>

Se observa que el incremento final no es del 10% (20−10) tras un aumento del 20% y un descenso del 10%

Sumar o restar variaciones porcentuales es garantía de fracaso

Si encuentro unas zapatillas a 24€ porque tienen un 20% de descuento, ¿qué precio puedo esperar si en las segundas rebajas hay un 40%?

Podríamos descubrir su precio antes de las rebajas y luego aplicarle el nuevo descuento, pero tenemos un camino más corto

	PRECIO	PORCENTAJE QUE PAGO
PRIMERAS REBAJAS	24	80 (−20%)
SEGUNDAS REBAJAS	x	60 (−40%)

$$80x = 24 \cdot 60$$

$$x = 1440/80 \qquad x = 18$$

En las segundas rebajas valdrán 18€